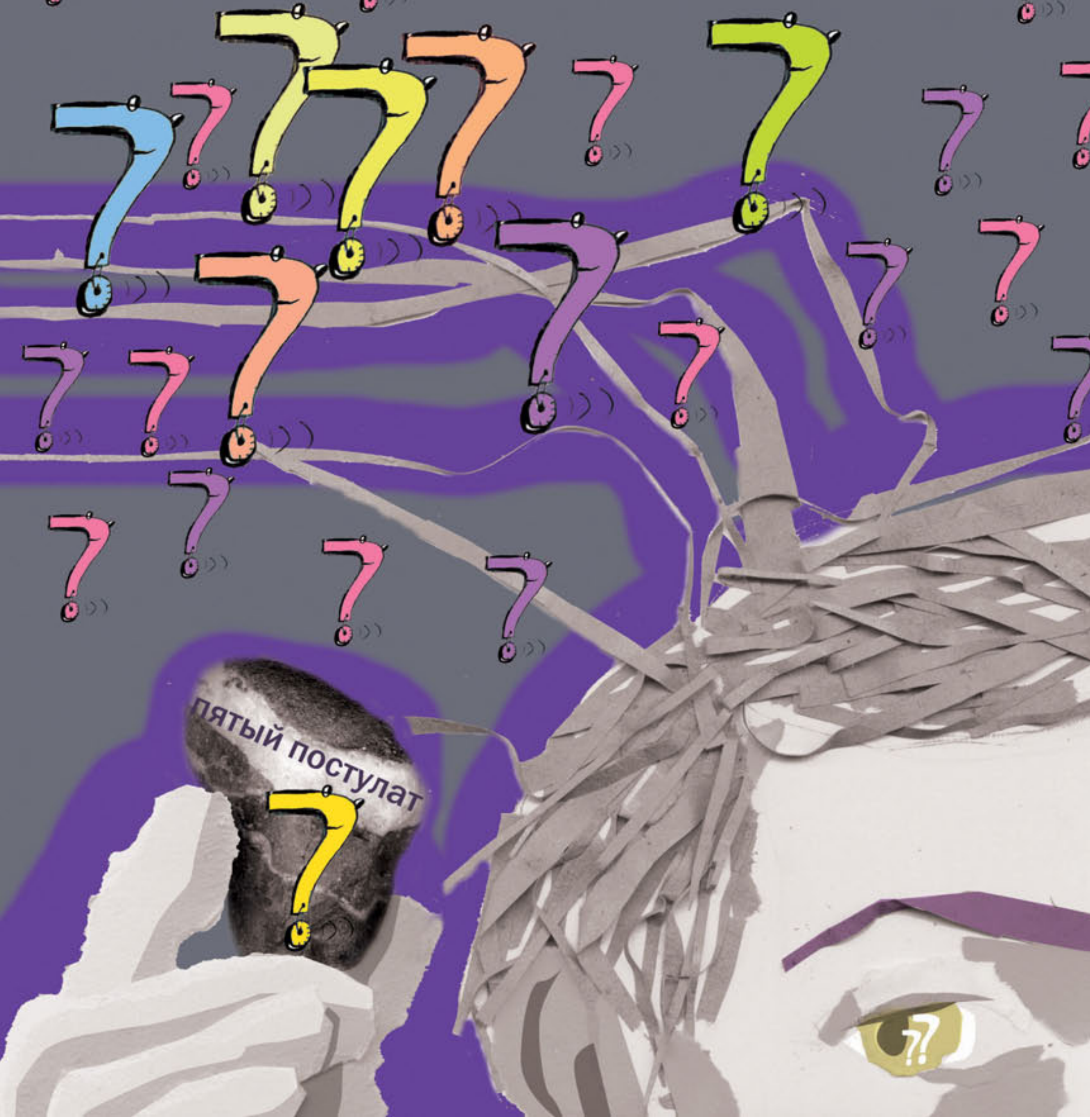
МАРТ/АПРЕЛЬ

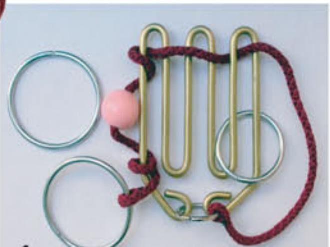
ISSN 0130-2221
2006 · №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Освободите два колечка



4

3

2

1

Головоломка, с которой вы познакомитесь на этот раз, одновременно и простая и трудная. Простая, потому что относительно легко освободить первое кольцо (большое). И трудная, потому что гораздо сложнее отцепить второе (малое) кольцо.

При изготовлении игрушки ориентируйтесь по рисунку. Важно соблюдать пропорции, а не конкретные размеры. Учтите, что шарик не должен проходить через проволочную фигуру. Его диаметр – меньше, чем у колец. Три кольца головоломки могут иметь одинаковые диаметры. Самое маленькое колечко замыкает проволочную фигуру и в разгадывании не участвует.

Итак, головоломку вы сделали. Приступайте к решению.

Чтобы облегчить задачу, последовательность действий показана на фотографиях. Когда вы научитесь уверенно снимать и надевать первое кольцо, то сможете самостоятельно решить и более трудную задачу – освободить второе кольцо.

А.Калинин

журнал© Квант

МАРТ АПРЕЛЬ 2006 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум

Сто восемьдесят лет тому назад, 23(11) февраля 1826 года состоялось первое публичное выступление Николая Ивановича Лобачевского с изложением основ совершенно новой, неевклидовой геометрии.

Сегодня мы воспроизводим статью академика Александра Даниловича Александрова, опубликованную в «Кванте» в 1982 году и приуроченную к 190-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского.

Один из крупнейших геометров двадцатого века А.Д.Александров, пожалуй, как никто другой смог не только профессионально передать суть открытия, но и эмоционально и ярко раскрыть драматизм столкновения идей, характеров. И автор статьи – Александров и ее герой – Лобачевский были выдающимися представителями российской науки. Обладая могучим математическим талантом, и тот и другой явились основоположниками фундаментальных геометрических теорий, навсегда вписав свои имена в историю мировой науки. Оба, обладая твердым характером и яростным темпераментом, страстно отстаивали науку и образование от агрессивной невежественности «сильных мира сего». На протяжении многих лет являясь ректорами ведущих университетов, и Николай Иванович и Александр Данилович оставили неизгладимый след в судьбе Казанского и Ленинградского университетов, которые они возглавляли.

Тупость и гений

А.АЛЕКСАНДРОВ

Всякий, кто занимался математикой – решая задачи, доказывая теоремы или формируя новые концепции, наверное, имел случай не раз поражаться своей тупости. Думал, думал над задачей – не решил, а узнал решение – подумал: какой дурак! как я не сообразил? А то думал, думал – решил и рад, а все же, бывает, подумаешь: тупица! как я раньше не сообразил?

У ученых-математиков бывает так: думаешь, думаешь над теоремой, иногда долго, иной раз не год и не два, ищешь доказательство и так и сяк, и с этого конца и с другого, ан не выходит, а вышло – удивляешься: дурак! как я раньше не сообразил? А уж о новых концепциях и говорить не приходится: занимаешься какими-нибудь вопросами, а не приходит в голову посмотреть на них с более общей точки зрения или с другой, так сказать, стороны; не формулируются поэтому общие понятия, проясняющие круг вопросов. А потом, если – какое счастье! – сообразил, то удивляешься: как это раньше тебе в голову не пришло? Ну а если сообразил кто-то другой, то как ни радуешься успеху науки, а зло берет: как это я, тупица, сам не додумался!

Поиски решения нестандартной задачи, как и доказательства теоремы, состоят обычно в том, что приходит в голову одно решение или доказательство – неверное! потом – другое: «гениальная идея!» – неверно! третья попытка – неверно! еще бросок на задачу – промах… И если задача или теорема трудная, то так может длиться долго.

Помню, предложил я Иосифу Либерману одну теорему доказать, была у меня хорошая гипотеза. Тогда он был студентом и стал бы крупным геометром, если бы не война: он погиб в августе 1941 года, а в июле в форме морского офицера защитил диссертацию – уже на втором году аспирантуры – такой был талант. Так вот, предложил я ему доказать теорему. Встречаемся через некоторое время, он говорит: доказал, и рассказывает. А я его зацепил: в этом месте почему вы так утверждаете? Ошибка – ушел Иосиф. Опять встречаемся – исправил он ошибку, но дальше опять ошибки. Так я его почти целый год гонял. Но потом он еще подучил топологию и доказал не только мою теорему, но и более сильную, которую уже сам сформулировал.

Таких историй долгих поисков можно рассказать множество. Вот, например, придумал я в 1937 году одну теорему, очень хорошую теорему, и доказал ее при некоторых дополнительных предположениях. Естественно, встал вопрос доказать ее без этих предположений. Вопрос стоит до сих пор — 45 лет. Очень я старался ее доказать, и другие очень старались, да не вышло.

И так во всех науках. Бьется филолог над расшифровкой и толкованием текста — и так и сяк... А потом, когда сообразил, тоже, наверное, удивляется, вроде нас, математиков: какой дурак! как это я раньше не сообразил? оно ведь очевидно!

Словом, тот, кто думал, вдумывался, искал, тот знает, насколько туп и несообразителен бывает человек. Сообразительностью своей любуются обычно люди, которым не приходилось упорно вдумываться и искать,— легко дается удача тому, кто не ставит перед собою трудных задач, серьезных целей.

Что такое геометрия Лобачевского

И вот, я хочу рассказать историю о человеческой тупости и о гении, историю, несравненно более значительную, чем те, о которых я только что говорил. Разговор пойдет об одном из величайших завоеваний человеческого духа, в котором участвовали первоклассные таланты и подлинные гении без преувеличений. Речь — о неевклидовой геометрии, о ее более чем 2000-летней истории.

История эта очень интересна и поучительна. С ней связано много такого, что касается не математики самой по себе, а свойств, путей и страстей человеческих. Но, прежде чем говорить об истории, надо бы объяснить, что такое неевклидова геометрия, или геометрия Лобачевского.

Ответ, конечно, всем известен: это — геометрия, полученная из геометрии Евклида изменением одной только аксиомы параллельных. Именно, у Лобачевского принимается за аксиому, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит по крайней мере две прямые, параллельные данной (т.е. лежащие с ней в одной плоскости и ее не пересекающие). Утверждения, или, другими словами, теоремы, которые выводятся из так измененных оснований геометрии Евклида, и образуют геометрию Любачевского. Все это, как мы видим, «очень просто» и говорится коротко и ясно. Трудность, однако, в том, что аксиома Лобачевского не соответствует нашему наглядному представлению. Поэтому и выводы из нее — многие теоремы геометрии Лобачевского — оказываются вовсе странными и невообразимыми. Реальный смысл этой геометрии из данного выше ее простого формального определения совершенно не ясен.

Сам Лобачевский называл свою геометрию *воображаемой.* Он смотрел на нее как на теорию, которая могла бы оказаться приложимой к реальному пространству. Но только «могла бы» — реальных же приложений не было. Поэтому и логическая непротиворечивость этой геометрии оставалась неустановленной. Ведь как ни развивал ее Лобачевский, а могло бы оказаться, что дальше все-таки обнаружится противоречие.

Реальный смысл и логическая непротиворечивость геометрии Лобачевского вытекают из ее простой модели, придуманной немецким математиком Ф. Клейном. В этой модели за «плоскость» принимается внутренность какого-либо круга (рис.1), за «точки»— точки этой внутренности, за «прямые» — хорды, конечно, с исключением концов, поскольку рассматривается только внутренность круга. За «перемещения» принимаются преобразования круга, переводящие его в себя и хорды — в хорды. Соответственно, «конгруэнтными» называются фигуры, переводимые друг в друга такими преобразованиями.

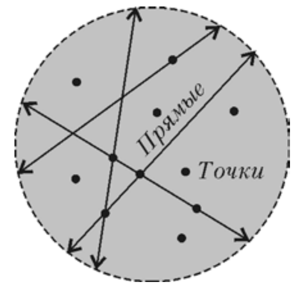


Рис. 1

Всякая теорема планиметрии Лобачевского является в этой модели теоремой геометрии Евклида и, обратно, всякая теорема геометрии Евклида, говорящая о фигурах внутри данного круга, является теоремой геометрии Лобачевского. Это общее утверждение доказывается проверкой справедливости в модели аксиом геометрии Лобачевского. То, что аксиома параллельных не выполняется в этой модели, видно непосредственно: на рисунке 2 через точку C, не лежащую на «прямой» (т.е. на хорде) AB, проходит бесконечно много «прямых» (хорд), не пересекающих AB. Поэтому, если в геометрии Лобачевского имеется противоречие, то это же противоречие (вернее, его перевод на «язык в круге») имеется и в геометрии Евклида.

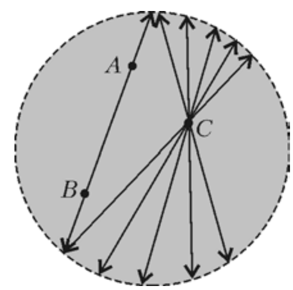


Рис. 2

Далее, всякая теорема геометрии Лобачевского описывает в модели Клейна некоторые факты, имеющие место внутри круга. Именно факты, если мы берем не абстрактный круг, а реальный круг и реальные хорды и понимаем теоремы как утверждения об этих реальных вещах, взятые, конечно, с той точностью, которая доступна для наших построений. Таким образом, геометрия Лобачевского имеет вполне реальный смысл с той точностью, с какой вообще имеет смысл геометрия в применении к реальным телам.

Стало быть, геометрия Лобачевского настолько непротиворечива, насколько непротиворечива геометрия Евклида, и имеет в такой же степени реальный, экспериментально устанавливаемый смысл.

От Евклида до Лобачевского

Сам Евклид (4 в. до н.э.) принимал в качестве аксиомы параллельных следующее предложение (у Евклида оно было «пятым постулатом»):

Если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Мы привели эту формулировку Евклида только затем, чтобы можно было убедиться в ее сложности.

Другие постулаты гораздо проще и формулируются гораздо короче, начиная с первого, согласно которому,через всякие две точки можно провести прямую.

Естественно возникали попытки освободиться от сложного пятого постулата, вывести его из других основных посылок геометрии. Я думаю, что сам Евклид предпринимал такие попытки или, во всяком случае, в его время уже были такие попытки. Известно упоминание у арабских авторов не дошедшего до нас сочинения Архимеда (3 в. до н.э.) «О параллельных линиях», где, надо полагать, пятый постулат выводился из каких-то более простых посылок.

Попытки доказать пятый постулат продолжались с тех пор в течение 2000 лет. Их предпринимали многие ученые. Вот неполный перечень: греки Птолемей (II в., тот самый Птолемей, «которого система») и Прокл (V в.), араб ал-Хайсам (X в.), перс (или таджик) Омар Хайям (XI в.– начало XII в., тот самый Хайям, который известен как великий поэт), азербайджанец ат-Туси (XIII в.), немец Клавий-Шлюссель (1514 г.; здесь и дальше это дата работы), итальянцы Катальди (1603), Борелли (1658) и Витале (1680), англичанин Валлис (1663), итальянец Саккери (1733), немец Ламберт (1766), французы Бертран (1778) и Лежандр (1794, 1823), русский Гурьев (1798). Все их попытки сводились к тому, что пятый постулат выводился из какого-нибудь другого положения. При этом многие не замечали этого, считая, что доказательство им удалось. Другие, более проникновенные и критичные, явно формулировали то положение, из которого выводили пятый постулат, как это сделал, например, Омар Хайям.

Напряжение поисков доказательства с бурным развитием математики в XVII–XVIII веках возрастало. Значительные усилия сделал итальянский монах, преподаватель математики и грамматики Джироламо Саккери, труд которого с попыткой доказательства пятого постулата появился в 1733 году – в год его смерти. Он называется «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить первые начала всей геометрии». Отправляясь от работ своих предшественников, Саккери пытается доказать пятый постулат от противного – приняв предположение, равносильное отрицанию пятого постулата, он выводил из него следствия, стремясь прийти к противоречию. Но так как отрицание пятого постулата есть аксиома Лобачевского, то выводы, которые получал Саккери, были не более и не менее как теоремами геометрии Лобачевского. Иначе говоря, Саккери развивал новую геометрию, не понимая, однако, того, что делает. К противоречию он не пришел, но все же заключил, что ему удалось доказать пятый постулат, хотя, по-видимому, он не был в этом вполне уверен. Он как бы убеждал сам себя, когда писал о гипотезе, равносильной отрицанию пятого постулата, что он «вырвал эту зловредную гипотезу с корнем».

Из довольно многочисленных (55) появившихся в XVIII веке сочинений по теории параллельных особенно выделяется написанная в 1766 году «Теория параллельных» Иоганна Ламберта, немецкого математика, физика и астронома. Ведя доказательство пятого постулата от противного, Ламберт вывел из его отрицания много следствий. Он, можно сказать, в значительной мере построил основы геометрии Лобачевского. В его выводах не было противоречия, и он не подумал, что нашел его, как это делали почти все его предшественники. Ламберт даже высказал мысль, что он «почти должен сделать вывод», что опровергаемая им гипотеза «имеет место на какой-то мнимой сфере». Но все же он остался уверен, что геометрия, основанная на отрицании пятого постулата, невозможна. Его работа не давала, однако, доказательства этому убеждению. Поэтому, надо думать, он остался ею недоволен и не опубликовал ее. Она была издана только в 1786 году – через 9 лет после его смерти и через 20 лет после того, как она была написана. В общем, Ламберт очень близко подошел к открытию новой геометрии, но не сделал его.

Вплотную подошли к пониманию возможности неевклидовой геометрии немецкие математики Швейкарт (1818) и Тауринус (1825), но ясно выраженной мысли, что намечаемая ими теория будет столь же логически законной, как и геометрия Евклида, они все же не высказали.

Гаусс, по его собственному свидетельству, занимался теорией параллельных с 1792 года и, как видно из его переписки, постепенно приходил к убеждению, что доказательство пятого постулата невозможно. Так, в 1817 году в письме к Ольберсу он писал: «Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, человеческим рассудком и для человеческого рассудка». Раз он пишет «прихожу все более», то, значит, еще не пришел окончательно. Далее он продолжает: «Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию приходится ставить не в один ранг с арифметикой, существующей чисто априори, а скорее с механикой». В то время он далеко развил неевклидову геометрию, но только в 1824 году в письме к Тауринусу он написал определенно, что неевклидова геометрия, «в которой сумма углов треугольника меньше 180°, совершенно последовательна» и что он «развил ее для себя совершенно удовлетворительно». Однако только в 1831 году он взялся за то, чтобы изложить, хотя бы кратко, свои выводы, но за всю свою жизнь так ничего и не опубликовал по поводу неевклидовой геометрии. Он боялся подорвать свой научный авторитет.

Но когда Гаусс писал все это, уже нашелся человек, который не только совершенно удовлетворительно развил геометрию, отрицающую пятый постулат, и не только пришел к убеждению, что эта геометрия совершенно последовательна, но, не убоявшись ничьего крика, доложил все это научному собранию. Это был Николай Иванович Лобачевский, который пришел к убеждению о возможности неевклидовой геометрии еще в 1824 году и представил доклад с изложением ее начал физико-математическому факультету Казанского университета 23 (11) февраля 1826 года; опубликовал он его в расширенном виде в работе «О началах геометрии» в ряде выпусков «Казанского вестника», научного издания Казанского университета, с февраля 1829 по август 1830 года.

В 1835–1838 годах Лобачевский публикует более развитое изложение своей теории «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», в предисловии к которому пишет: «Напрасное старание со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения». Для Лобачевского вопрос об истинности той или иной геометрии был, стало быть, вопросом опыта; свою геометрию он рассматривал как возможную теорию свойств реального пространства, т.е. свойств структуры соответствующих отношений материальных тел и явлений.

Почти одновременно с Лобачевским – в 1825 году – к той же геометрии пришел молодой венгерский математик Янош Больяй (Бойаи). Свои выводы Янош Больяй изложил в 1832 году в качестве приложения (Аппендикса) к учебнику геометрии своего отца Фаркаша Больяй. Фаркаш Больяй послал учебник Гауссу. Тот, одобрительно отозвавшись о результатах Яноша, написал вместе с тем, что все это ему давно известно. Янош, понимавший значение своих открытий, решил, что Гаусс просто приписал их себе. Он надолго прекратил свои занятия неевклидовой геометрией.

Но Лобачевский продолжал разрабатывать свою геометрию и публиковать работы с ее изложением вплоть до самой смерти.

Нельзя удивляться, что новая геометрия могла казаться невозможной. Посмотрите на рисунок 3: ясно, что прямая CM, если ее достаточно далеко продолжить, обязательно пересечет прямую AB. Допущение, будто через одну точку проходят две прямые, параллельные данной, совершенно противоречит наглядному представлению. Такое допущение кажется просто нелепым. Никакой неевклидовой геометрии быть не может! Тем более нужно отдать должное смелости мысли Лобачевского и Больяй, которые решились допустить «нелепость». Нелепость с точки зрения наглядного представления – да, но с точки зрения логики – другое дело. Как ни кажется наглядно нелепым допущение многих параллелей, логически оно допустимо. Нужна была большая смелость мысли, чтобы твердо убедиться в этом, хотя теперь, когда найден простой смысл неевклидовой геометрии, никакой смелости мысли не нужно – достаточно самой небольшой способности к отвлеченному мышлению.

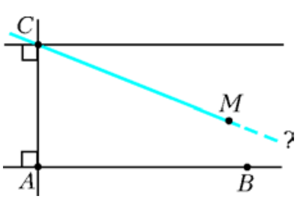


Рис. 3

От убеждения к доказательству

Итак, Лобачевский и Больяй публично, а Гаусс в письмах выразили убеждение в правомерности неевклидовой геометрии и далеко развили ее. Однако это убеждение основывалось только на том, что в полученных выводах не было противоречий. Но ведь можно было бы думать, что в дальнейших выводах противоречия все же появятся. Реальный смысл новой геометрии оставался совершенно неясным. И пока он не был найден, великое открытие все же висело в воздухе – геометрия Лобачевского оставалась не более чем воображаемой.

В 1839–1840 годах появились две работы профессора Дерптского (ныне Тартуского) университета Ф.Миндинга, в которых он исследовал некоторые специальные поверхности – поверхности постоянной отрицательной кривизны. В этих работах по существу заключался вывод, что геометрия на таких поверхностях есть не что иное как геометрия Лобачевского. Но этот вывод там не был явно высказан. Интересно, что двумя годами раньше в том же журнале, где были напечатаны работы Миндинга, была опубликована одна из работ Лобачевского!

В 1854 году, при вступлении на должность профессора Геттингенского университета, Бернхард Риман, как это полагалось, прочел пробную лекцию. Лекция называлась «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». Она содержала необычайное богатство плодотворных идей – от общей концепции математического пространства до предвидения того, что стало потом общей теорией относительности. Кроме того, в лекции была намечена общая теория некоторого типа пространств (называемых теперь *римановыми*), которые включают, как простейшие частные случаи, пространства Евклида, Лобачевского и так называемые сферические пространства. Риман дал чисто аналитическое определение этих пространств; это по существу означало, что геометрия Лобачевского в такой же степени непротиворечива, как и анализ.

Но этого никто не понял, не заметил. Лекция Римана осталась непонятой. И только слушавший ее старый, 77-летний Гаусс ушел, как свидетельствуют, после лекции в глубокой задумчивости. Лекция Римана не была сразу опубликована, ее издали только в 1868 году, через 2 года после его смерти. И тогда она сразу произвела величайшее впечатление, вызвала бурное развитие намеченной в ней теории.

Тогда же, в 1868 году, итальянский математик Бельтрами сделал то, до чего дошел, но чего не сказал Миндинг,– он показал, что геометрия Лобачевского выполняется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Однако выводы Бельтрами были аналитическими, далекими от элементарной геометрии, от Евклида. Лишь в 1871 году Клейн заметил ту модель на круге, о которой шла речь в начале статьи. Позднее Пуанкаре нашел другую интересную модель, связанную с комплексными числами.

Так через 40 лет после опубликования первых работ Лобачевского и Больяй их убеждение было доказано, и их геометрия получила всеобщее признание.

(Продолжение следует)

Как квантовая механика описывает микромир

М.КАГАНОВ

В создании физической теории существеннейшую роль играют фундаментальные идеи. Физические книги полны сложных математических формул. Но началом каждой физической теории являются мысли и идеи, а не формулы. Идеи должны позднее принять математическую форму количественной теории, сделать возможным сравнение с экспериментом.

А.Эйнштейн

Вступление

Когда пишешь статью, стараешься представить себе, кто будет ее читать. В этот раз вопрос о том, кто мой читатель, меня особенно волновал. Дело в том, что статья получилась несколько более сложной, чем другие мои статьи, которые публиковались раньше в «Кванте». Правда, в процессе работы над статьей я успокаивал себя тем, что она адресована молодым людям, которые *уже* интересуются физикой, читали научно-популярные статьи по атомной физике и готовы потратить определенные усилия, чтобы разобраться в том, что читают. И еще, предлагаемая статья несколько отличается от большинства научно-популярных статей, посвященных квантовой механике. Здесь главное внимание уделено не конкретным результатам, а более общим вопросам. Ее основная тема – принципиальное отличие описания движения микрочастиц от описания движения макроскопических тел.

Хотелось бы, чтобы эта статья усилила ваше желание глубже понять физику, а в дальнейшем – и избрать физику своей профессией. Вы ведь уже знаете, что в физике бесконечно много интересного…

Как и почему?

Когда задумываешься о проблемах познания, о том, как наука объясняет строение Мира и его частей, то понимаешь, что ответить на вопрос «Почему?» гораздо труднее, чем на вопрос «Как?». Ответ на первый вопрос предполагает возможность сослаться на более общую и потому на более глубокую теорию. Но мне всегда кажется, что как только я отвечу на очередной вопрос «Почему?», немедленно последует новый вопрос и спрашивающий захочет узнать, почему справедливо то, на чем основывается ответ на первое *почему*.

На вопрос «Как?» ответить проще. Стараясь объяснить, *как* движутся частицы или *как* они, объединя-

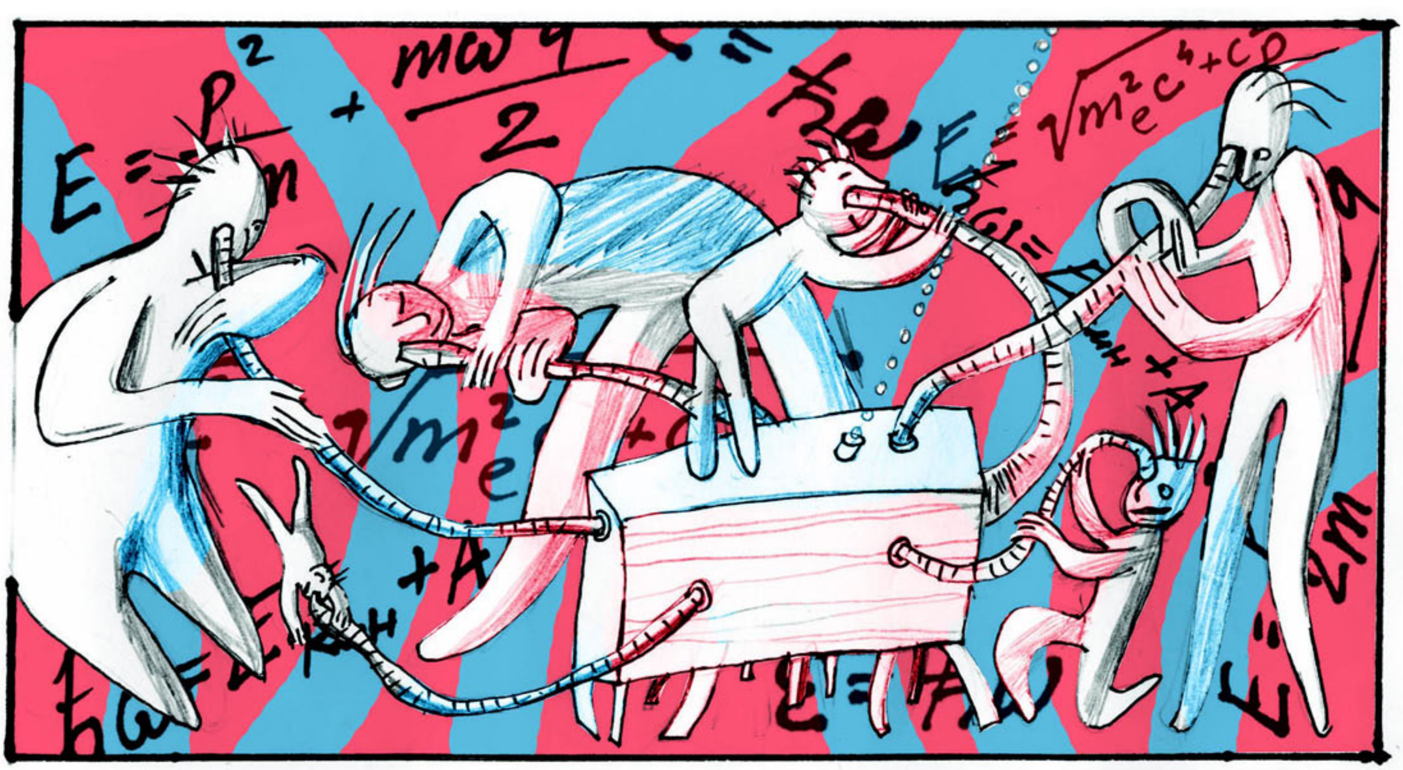


Иллюстрация Н.Суворовой

ясь, создают более сложные конструкции (атомы, молекулы, тела...), и *как* знание строения конструкций и сил, действующих между частями конструкций, помогает понять наблюдаемые явления и/или свойства окружающих нас тел, можно четко сказать, какая теория используется для объяснения и какие объекты воспринимаются как данные. Нет нужды пытатся объяснять, *почему* они такие. Иногда это добровольное ограничение, иногда ответа нет, скорее всего – пока.

Отсутствие ответа на вопрос «Почему?», как правило, не мешает ответить на вопрос «Как?». Более того, чаще всего именно так бывает не только в рассказе о науке, но и в научном творчестве. Знакомство с тем, как наука отвечает на бесконечно возникающие вопросы «Как?», позволяет почувствовать, где в настоящее время проходит граница познанной области.

Вот – два примера. Они помогут понять различие между обсуждаемыми вопросами.

Первый пример. За последние десятилетия удалось описать, *как* Вселенная развивалась с момента Большого взрыва до сегодняшней ее стадии. Многие черты развития допускают наблюдательную проверку и подтверждают высказываемые гипотезы. Для описания развития Вселенной используют законы физики, которые были открыты и сформулированы при изучении явлений совершенно иного масштаба, т.е. не пришлось создавать другую, какую-то особую *вселенскую* физику.

А *почему* произошел Большой взрыв? *Почему* законы природы такие, какие они есть, а не какие-нибудь другие? Ведь если бы законы были другими, то и Вселенная, естественно, была бы совсем иной. Возможно, такой, что в ней никогда не смогла бы возникнуть жизнь и, тем более, думающее, познающее существо.

Допустимы ли такие вопросы? Я убежден, что запрещать задавать какие-либо вопросы нельзя, хотя на некоторые из них наука дать ответ не может и не сможет. Все чаще мне приходит в голову мысль, что при любом развитии науки останутся вопросы, выбор ответа на которые диктуется верой. Разные люди выбирают разные ответы.

Второй пример. Квантовая механика – о которой речь пойдет в этой статье – позволила в принципе объяснить строение и свойства веществ, их разнообразие и присущие им общие черты. Здесь не место для подробностей. Подчеркну только, что в понимании того, *как* построены тела и *каковы* их свойства, фундаментальную роль играет тот безусловный факт, что ядра атомов построены из нуклонов (протонов и нейтронов), а их оболочки – из электронов. Конкретные черты всей конструкции существенно определяются тем, что электрон примерно в 2000 раз легче нуклона. Если бы частицы, несущие заряды разных знаков, имели одинаковые массы, Мир был бы совершенно иным. Мог ли бы существовать такой мир, не знаю.

Так вот, я не могу ответить на вопрос, *почему* электрон в 1840 раз легче протона. Похоже, в настоящее время никто не знает на него ответа. Значит ли это, что все знание структуры тел и понимание их свойств не имеет основы, построено на песке? Нет, конечно. Важная черта любой науки – возможность использовать известные (или даже предполагаемые) данные о тех элементах, которыми оперирует теория, добиваясь понимания. Данные эти не объясняются, а указываются, констатируются. Если теория хорошо и достаточно полно разработана, как например квантовая теория конденсированных тел, то можно точно указать, из каких элементов построены исследуемые объекты и каковы свойства элементов конструкции. Вопрос о том, *почему* элементы имеют такие свойства, а не какие-либо другие, считается неуместным. И сам вопрос, и ответ на него принадлежат другой области физики.

Мир объективно существует

Во фразу, вынесенную в подзаголовок, я вкладываю простой смысл: Мир такой, каков он есть. Нам (мне – точно!) представляется, что Мир познаваем. Ощущение познаваемости Мира из-за грандиозных успехов науки превращается в уверенность. Уверенность оказывала и оказывает стимулирующее действие. Но все же можно себе представить, что в будущем человечество столкнется с ситуацией, когда придется признать: *дальнейшее познание окружающего нас Мира невозможно*.

В частности, уже сейчас мы понимаем, что не можем ответить на вопрос, *почему* Мир познаваем. Ответ на этот вопрос, по-видимому, находится за пределами научных методов познания. Это, похоже, один из тех вопросов, ответ на который зависит от мировоззрения отвечающего. Ученый-атеист, не умея ответить на этот вопрос, ограничивается тем, что пытается максимально использовать *познаваемость* Мира. Ее он воспринимает как естественное свойство материального Мира. Верующий ученый в процессе научной деятельности поступает так же, как атеист, но познаваемость Мира считает, по-видимому, Божьим даром. Мое ощущение: *почему* – я не знаю, но Мир *таков*. И это все, что о нем можно сказать, с каждым днем вкладывая в слово «*таков*» все больше и больше сведений, полученных путем научного познания.

Физика и математика

Разные ученые приходят к своим результатам очень разными путями, но (не конкретизируя) можно наметить некую общую схему пути научного познания. Не каждый ученый проходит весь путь. Чаще в процессе познания принимают участие разные ученые. Особенно, когда речь идет не о конкретном частном результате, а о создании новой науки – такой, как квантовая механика.

Начинается все с *наблюдения* и *обобщения*. Если собранные опытные факты не укладываются в существующую *теорию*, то некоторые ученые (далеко не все!) задумываются. *Необходимо* понять, в чем дело. Делаются попытки объяснить новые факты старой теорией. Неудача следует за неудачей. Кто-то, поняв, что нет надежды «подправить» старую теорию, порывает с ней – и ... рождается *новая теория*. Не вся целиком, а либо ее элементы, либо контуры. Если новая теория справляется с объяснением опытных фактов, то ей предстоит долгая жизнь. Она совершенствуется и постепенно становится столь же строгой и логически безупречной, как и ее предшественница.

Наша статья посвящена прежде всего *теории*. Но, начиная, наверное, с Галилея, *наблюдение и обобщение* (а об объяснении и говорить не приходится) не могут обойтись без теории. Даже отбор предмета наблюдения предполагает, что наблюдение будет важно для теории. Для теории, которой пока нет! Так поступали даже в античные времена, только теперь рассуждения античных ученых трудно называть теорией.[1]

Теория, как мы отметили, – творение ума. Первичное и одно из наиболее важных требований к теории – ее логичность, непротиворечивость. Это требование предъявляет к теории ее создатель. В частности, именно отсюда – необходимость использовать *законные* математические действия и приемы. Принято считать, что использование математики обеспечивает логичность теории. Была даже высказана максима: «Сколько математики, столько теории» . Так ли это? Теория теории рознь.

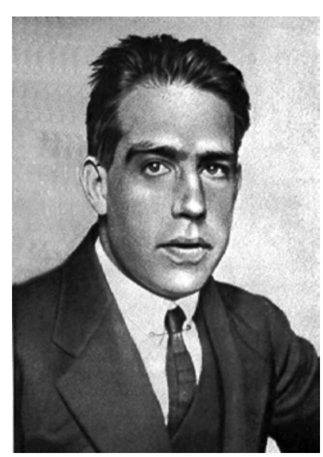
Выше я упомянул границу познания. Оставаясь на интуитивном уровне понимания этого термина, представим себе, что обнаружено или известно давно пока еще непонятое явление, «расположенное» в познанной области да еще вдали от границы познания. Мы хотим его понять, т.е. хотим построить теорию, которая объясняет явление. Непознанных явлений в познанной области сколько угодно. Говоря, что явление принадлежит *познанной области*, мы подчеркиваем нашу уверенность, что для построения теории *этого* явления фундаментальная теория существует. Значит, есть возможность строго поставить математическую задачу и использовать строгие математические методы при ее решении. И в постановке задачи, и при ее решении математика предъявляет требования к физике. Например, физик-теоретик думает, что достаточно полно сформулировал свою задачу, а математический анализ показывает, что не хватает каких-то условий (начальных или граничных). Физик задумывается, выясняет, *что* он упустил, формулирует и добавляет необходимые условия. Этот процесс уточнения задачи не всегда проходит так безобидно, как может показаться. Даже когда «спорящие» физик и математик – одно лицо, дискуссия может быть очень острой.

Когда физик занят исследованием в непознанной области или на самой ее границе, то ситуация в подавляющем числе случаев другая. Физик по необходимости вводит новые понятия в попытке осознать структуру и свойства тех физических сущностей, о которых пока мало что известно. Введение новых понятий заставляет наделять их чертами, которые трудно, а иногда невозможно описать апробированными математическими приемами. Иногда физик бросает математику вызов: «Что делать, если необходимо то-то и то-то, а у вас по этому поводу ничего не сказано?» Бывает и иначе: математик, увидев, как (иногда неуклюже) физик преодолевает математические трудности, иронично замечает: «Что же вы не воспользуетесь тем-то и тем-то? Мы сомневались, нужно ли это кому-нибудь, а оказалось... Очень рады, что полученные нами результаты вам нужны».

На официальном языке два последних абзаца можно заменить одной фразой: «Физика и математика обогащают друг друга».

Хочу повторить мысль о том, что одно из самых важных требований к теории – ее логичность и непротиворечивость. И еще, что использование математики обеспечивает логичность теории. Ясно, что речь идет о пользовании *узаконенными* математическими действиями. Но иногда новые математические понятия вводит физик, лишь потом эти понятия узакониваются математиками. Самый простой пример – обобщенные функции. Наиболее известная из них – дельта-функция Дирака. Сначала ее так и величали: *дельта-функция Дирака*. Потом привыкли, и она потеряла имя того, кто ввел ее в обращение. А сделал это Поль Дирак (1902–1984) – один из создателей квантовой механики.

Иногда физик сознательно жертвует математической логикой – когда ощущает, что «жертва угодна богам». Так, релятивистская квантовая механика не может обойтись без перенормировок – определенных дополнительных предписаний. Они выходят за границы общепринятых математических правил. Но то, что «жертва угодна богам», несомненно: теория позволяет описать широкий круг явлений, добиваясь баснословно точного совпадения своих предсказаний с данными опытов. Квантовая электродинамика позволяет вычислить магнитный момент электрона, и результат вычисления совпадает со значением, полученным на опыте, с фантастической, рекордной относительной точностью порядка 10^{-10}. Чудо да и только! Наверное, у меня ощущение чуда – это результат недостаточно глубокого понимания мною теории. Нам часто кажется чудом то, что мы не можем объяснить. Чудо или не чудо, но , как я понимаю, незаконные операции в теории присутствуют, а перенормировки – не только общепринятый способ делать вид, что в теории все в порядке, но и возможность получать конкретные и надежные результаты. Все понимают, что построение непротиворечивой теории – дело будущего. Есть уверенность, что будущая теория среди прочих своих достижений объяснит, в чем причина успеха перенормировок.


Нильс Хенрик Давид Бор

Атом водорода

Теперь речь пойдет о теории самого простого атома – атома водорода. Ее создал Нильс Бор (1885–1962) в 1913 году. Это была первая удавшаяся попытка

[1] *Рекомендую прочесть книгу Э.Шрёдингера «Природа и греки» (Москва–Ижевск: R&C Dynamics, 2001). Она поможет понять место античной науки в истории естествознания.*

понять строение атома и облечь понимание в формулы, допускающие убедительное сравнение теории с экспериментом. И в данном случае не обошлось без «жертвы, угодной богам».

Днем рождения квантовой физики надо считать 14 декабря 1900 года, когда Макс Планк (1858–1947) выступил со своим историческим докладом на заседании Немецкого физического общества. Убедившись, что классическая физика не может объяснить наблюдаемые законы теплового излучения, Планк понял, что опытные факты требуют ввести предположение, несовместимое с классической физикой. Он пришел к выводу, что согласия теории с опытом можно добиться, только если признать зернистость энергии осциллятора, и принял, что энергия осциллятора равна $E = n\hbar\omega$, где n – целое число и ноль[2], ω – частота осциллятора, а $\hbar$ – новая физическая постоянная. Постоянная естественно получила название *постоянной Планка* и скоро стала одной из важнейших мировых физических констант. Ее современное значение равно[3] $1{,}0546 \cdot 10^{-27}$ эрг $\cdot$ с.

Макс Планк

В превращении постоянной Планка в мировую константу определяющую роль сыграл Альберт Эйнштейн (1879–1955), распространив квантовый подход на широкий круг явлений – от теплоемкости твердых тел до фотоэффекта. Наименьшую порцию энергии осциллятора назвали *квантом энергии*, или просто *квантом*. Квант энергии равен $\hbar\omega$.

Небольшой экскурс в историю физики нам понадобился, чтобы понять, из чего исходил Нильс Бор, пытаясь построить теорию атома.

Итак, Бор понимал, что есть не только *необходимость*, но и *возможность* выйти за пределы классической ньютоновской механики. Он верил недавнему (1911 г.) открытию Эрнеста Резерфорда (1871–1937) ядра атома, в котором сосредоточена масса атома и которое своими размерами приблизительно в 10^5 раз меньше атома. Несомненно, Бор вслед за Резерфордом, которого он считал своим учителем, глубоко проникся уверенностью, что любой атом напоминает Солнечную систему: ядро – Солнце, а электроны – планеты. Только силы, действующие между ядром и электронами, неизмеримо больше, чем силы гравитационного ньютоновского притяжения между микрочастицами. Притяжение обусловлено тем, что у ядра и электонов заряды разного знака. Они притягиваются друг к другу кулоновскими электростатическими силами. Атом водорода – простейшая система. Он состоит из одного протона – «солнца» и одного электрона – «планеты».

Почему была *необходимость* выйти за пределы классической физики? Причина состояла в том, что классическая физика не могла объяснить *устойчивость атома*, не могла ответить на фундаментальные вопросы, почему *все атомы* одного элемента *тождественны между собой* и почему *спектр излучения* возбужденных атомов *дискретен*. Все эти вопросы и ответы на них тесно связаны между собой. Вопросы содержат *почему*. Подчеркнем: описать, *как* движутся частицы в атоме, с помощью существующей механики оказалось невозможным. Об этом – чуть подробнее.

Стабильное существование планетарной системы возможно, только если «планета» движется вокруг «солнца» и центробежная сила инерции противостоит силе притяжения. Так как протон во много раз тяжелее электрона, то можно считать, что движется только электрон. Обозначим массу электрона m_e ($m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ г), его заряд равен $-e$ (заряд протона $+e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ), скорость электрона v. Считая что электрон движется по окружности радиусом a, имеем

$$\frac{e^2}{a^2} = \frac{m_e v^2}{a}, \text{ или } \frac{e^2}{a} = m_e v^2.$$

Стабильность объяснить, похоже, можно вращением. А тождественность? В одном атоме скорость электрона может быть больше, в другом меньше. Радиусы их будут отличаться. Возможно, существует какая-то характерная скорость? Физика уже имела в своем распоряжении характерную скорость – скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Попробуем подставить это значение в приведенную формулу. Если $v = c$, то размер атома должен быть порядка 10^{-13} см. Однако уже было известно, что атомы (даже самый легкий из них – атом водорода) значительно больше – радиус атома порядка 10^{-8} см. Значит, скорость v электрона значительно меньше скорости света c, и релятивистские эффекты не должны иметь места.

Может быть, можно найти какую-то другую характерную скорость или другой характерный размер? Значением констант – величинами заряда и массы электрона – мы уже воспользовались, других констант нет. Во всяком случае, нет в пределах классической механики.

Прежде чем выйти за пределы классической (неквантовой) физики, вернемся к вопросу о стабильности. Атом, как мы отметили, стабилен с точки зрения классической механики. А как обстоит дело с электродинамикой? Согласно законам электродинамики, любое заряженное тело, двигаясь с ускорением (а движение по окружности или по эллипсу это движение с ускорением), будет излучать электромагнитные волны. Если частота обращения равна ω, то и частота волн будет ω. Волны унесут часть энергии электрона, он приблизится к ядру, скорость его возрастет (!), частота увеличится. Так, постепенно приближаясь к ядру и

[2] *Может ли энергия осциллятора быть равной нулю, мы обсудим позже.*

[3] *В этой статье автор использует привычную для физиков-теоретиков гауссову систему единиц. (Прим. ред.)*

излучая волны все более высокой частоты, электрон в конце концов упадет на ядро. Можно посчитать, сколько на это ушло бы времени, если бы такая картина имела место. По атомным масштабам, для этого нужно много времени: примерно миллион раз обернулся бы электрон вокруг ядра, прежде чем упал бы на него. А по человеческим масштабам, время жизни атома было бы совершенно ничтожным – приблизительно 10^{-10} с. О какой стабильности можно говорить?!

Уменьшение энергии и одновременное увеличение скорости при приближении электрона к ядру может удивить. Не удивляйтесь: полная энергия движущегося электрона E тем больше, чем электрон дальше от ядра. Действительно, сумма потенциальной и кинетической энергий равна

$$E = -\frac{e^2}{a} + \frac{mv^2}{2}, \quad \text{но} \quad \frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{a^2}, \quad \text{откуда} \quad E = -\frac{e^2}{2a}.$$

Потенциальная энергия электрона, соответствующая силе притяжения $F = -\frac{e^2}{a^2}$, есть

$$U = -\frac{e^2}{a} + \text{const}.$$

Постоянную принято считать равной нулю, тогда при бесконечном расстоянии электрона от ядра энергия обращается в ноль. При отрицательной энергии $(E < 0)$ электрон вращается вокруг ядра, а при $E > 0$ он не связан с ядром и может удалиться на бесконечность.

К 1913-у году Нильс Бор понимал или, по меньшей мере, надеялся, что постоянная Планка может играть роль в объяснении свойств микроскопических объектов. Давайте попробуем наряду с m_e и e включить $\hbar$ в число величин, которые могут входить в формулы, определяющие значения скорости электрона v и радиуса его орбиты a. Нетрудно убедиться, что из соображений размерности получится

$$a = \frac{\hbar^2}{e^2 m_e}, \quad v = \frac{e^2}{\hbar}.$$

Лучшим доказательством правильности догадки служит численная оценка – и радиус орбиты a, и скорость v имеют нужный порядок величины: $a \sim 10^{-8}$ см, $v \sim 10^8$ см/с.

Результат, конечно, многообещающий. Но как двигаться дальше? Мне не хочется нарушать историческую последовательность событий. Обычно при популярном изложении в этот момент привлекают соображения Луи де Бройля (1892–1987) о существовании волн материи. Но, к сожалению, Бор этих соображений не знал – они были высказаны Луи де Бройлем лишь 10 лет спустя. Бор же исходил из того, что ему было известно.

Известно было, что энергия осциллятора *квантуется*. Согласно Планку, $E/\omega = n\hbar$. Энергию E осциллятора – частицы массой m, колеблющейся вдоль координаты q, можно записать следующим образом:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

где $p = mv$ – импульс частицы. В физике часто употребляют понятие «фазовое пространство», добавляя к этим словам, к какой механической системе они относятся. *Фазовое пространство осциллятора* – это плоскость, на которую нанесена система координат: по оси абсцисс – координата q, а по оси ординат – импульс p. Выражение для энергии можно рассматривать как уравнение траектории в фазовом пространстве. Это – эллипс с полуосями $\sqrt{2Em}$ и $\sqrt{2E/(m\omega^2)}$. Площадь эллипса равна числу π, умноженному на произведение его полуосей. Это означает, что траектория в фазовом пространстве осциллятора охватывает площадь, равную $2\pi E/\omega$, или $2\pi I$. Величина I носит название *действия*.

Теперь условие квантования можно обобщить на любое периодическое движение: *если частица совершает периодическое движение, ее действие квантуется.* Закон квантования прост: действие равно целому числу постоянных Планка, т.е.

$$I = n\hbar, \ n = 1,2,3\ldots$$

Подчеркнем, что условия квантования (и условие Планка, и его обобщение) в классическую механику внесены только в попытке объяснить опытные данные. В классической механике нет каких-либо выделенных траекторий. Согласно логике классической механики, возможны траектории с любым значением действия. Квантование нарушает логику классической механики.

Понимая, что «совершает преступление», Нильс Бор все же применил условие квантования к движению электрона вокруг протона. Результаты не заставили себя ждать. Оказалось, что электрон может (должен) двигаться по вполне определенным орбитам, радиусы которых равны

$$a_n = a_{\text{B}} n^2, \ \text{где} \ a_{\text{B}} = \frac{\hbar^2}{me^2}, \ n = 1,2,3\ldots$$

Индекс «B» – в честь Бора (Bor). Величину a_{B} так и называют – *радиус Бора*, это минимальное расстояние, на которое электрон может приблизиться к ядру (протону). Радиус Бора с большой точностью равен $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ см. Подставив значение радиуса a_n в выражение для энергии, получим

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_n} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1,2,3\ldots$$

Попытаемся понять качественную сторону полученных результатов. Электрон в атоме может иметь только дискретные значения энергии. Мы нарочно опустили наименование атома (водород), так как в любом атоме энергии электронов дискретны. Состояние электрона с дискретной энергией – *разрешенное состояние*. По теории Бора электрон, находясь в разрешенном состоянии, хотя и движется с ускорением, но не излучает (не спрашивайте, *почему*!). Среди разрешенных состояний есть состояние с наименьшей энергией E_1. Она отрицательна, но не равна минус бесконечности, как было бы, если бы электрон упал на протон (при $a = 0$). Меньшей энергии, чем E_1, электрон иметь не может.

Состояние с наименьшей энергией называется *основным*. Все остальные разрешенные состояния называют *возбужденными*. Любое возбужденное состояние не вполне стационарно. Из возбужденного состояния электрон может «перепрыгнуть» в состояние с меньшей энергией, но только в такое состояние, энергия которого разрешена.

Энергия излучается квантами $\hbar\omega$. Частота излучения, т.е. энергия кванта, определяется законом сохранения энергии. В процессе излучения, как во всех процессах, происходящих в природе, выполняется закон сохранения энергии. В согласии с ним, энергия излученного кванта равна

$$\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m,$$

где n и m – целые числа и $n > m$. Сколько времени электрон проведет в возбужденном состоянии, зависит от ряда причин. Времена эти значительно различаются, но все они конечны. По теории Бора вычислить их нельзя.

Электрону, находящемуся в основном состоянии, закон сохранения энергии запрещает излучать электромагнитную энергию. Основное состояние электрона в атоме устойчиво.

Существование основного состояния обеспечивает тождественность атомов и их стабильное существование. Имеется полное согласие формулы

$$\hbar\omega_{nm} = \frac{me^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \text{ при } n,\ m = 1,2,3,\ldots \text{ и } n > m$$

со спектроскопической картиной.

Если бы задачей квантовой теории было лишь вычисление спектра атома водорода, то теорию Бора при всей ее эклектичности можно было бы посчитать выполнившей свою задачу. Задача была другой: понять, как «устроены» атомы. Но даже с построением теории атома гелия – с двумя электронами – новая теория Бора справлялась с большим трудом. И уж, конечно, она по общности и возможностям ни в какое сравнение не могла идти с классическими теориями. В конце XIX века казалось, что классической физике доступно объяснить «все на свете» с единых позиций. А у Бора вместо стройной теории – странная эклектика, по загадочной причине описывающая экспериментальные факты.

И все же значение теории Бора огромно. Впервые было показано, что объяснить свойства атомных частиц можно, только если «позвать на помощь» кванты. Правда, и сами кванты – незаконнорожденные отпрыски классической теории. Откуда они взялись? Что это за теория, когда ответ надо скорее угадывать, чем использовать привычную формулу, означающую, что теория завершена, правила выработаны и остается решать задачи, относящиеся к прерогативе теории.

С первых же дней создания теории атома водорода и Нильс Бор, и все его коллеги пытались построить *настоящую* теорию. На создание квантовой теории ушло приблизительно 15 лет. За эти годы была создана *квантовая механика*, и в понимании законов микромира произошел удивительный скачок. Без преувеличения можно сказать, что создание квантовой механики – один из важных этапов истории цивилизации. Мир изменился за время жизни одного поколения людей. Последствия этого события будут ощущаться всегда.

Волны? Частицы?

То, что свет имеет двойную сущность, постепенно вошло в сознание физиков. *Фотоны* стали так же реальны, как световые волны. Этому способствовал ряд экспериментальных результатов, которые получили естественное объяснение на основе подхода к свету как к потоку фотонов. Упомянем лишь два явления.

Первое явление – *фотоэффект* – это испускание электронов веществом при облучении его светом. Отметим три экспериментальных факта: максимальная кинетическая энергия $E_{\text{кин}}$ вылетевшего из вещества электрона не зависит от интенсивности света; $E_{\text{кин}}$ линейно зависит от частоты света; существует пороговый эффект – при частотах, меньших некоторой частоты ω_0, фотоэффект отсутствует.

С точки зрения представления о свете как о волновом процессе, эти факты были необъяснимы. Альберт Эйнштейн объяснил их в работе 1905 года «Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света». Объяснение удивительно просто: электрон поглощает свет квантами – фотонами. При поглощении фотона с энергией $\hbar\omega$ выполняется закон сохранения энергии

$$\hbar\omega = E_{\text{кин}} + A,$$

где A – энергия, которую надо затратить, чтобы «оторвать» электрон от вещества, ее называют *работой выхода*. Все перечисленные экспериментальные факты – следствие этого равенства.

Значение упомянутой работы видно по тому, что Нобелевскую премию в 1921 году Эйнштейн получил со следующей формулировкой: «За важные физико-математические исследования, особенно за открытие законов фотоэлектрического эффекта».

Второе явление – *комптон-эффект* – это рассеяние электромагнитной волны на свободном электроне. Назван эффект в честь американского физика Артура Комптона (1892–1962). Явление «впервые с требуемой тщательностью было им изучено», хотя эффект «проявлялся уже в первых опытах по рассеянию рентгеновских лучей…» (цитирую по Физической энциклопедии).

Особенность эффекта, которую невозможно объяснить, исходя из волновых представлений о свете, – это небольшое уменьшение частоты рассеянного света по сравнению с частотой падающего света. Действительно, объяснить такое нельзя: рассеянный свет излучают электроны, под действием электрического поля световой волны они колеблются с частотой света и свет такой же частоты должны излучать.

Совершенно другая картина, если свет – поток фотонов. Фотон – частица, чем-то напоминающая снаряд. Столкнувшись с электроном, фотон, как всякая частица, часть энергии и импульса передает электрону. Энергия ε и импульс $\vec{p}$ фотона определяются его частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$:

$$\varepsilon = \hbar\omega,\quad \vec{p} = \hbar\vec{k},$$

причем частота и величина волнового вектора связаны между собой соотношением $\omega = ck = 2\pi c/\lambda$, где λ – длина волны света, а направлен волновой вектор туда, куда движется волна. Согласно релятивистской механике Эйнштейна, энергия E электрона зависит от его импульса P следующим образом:

$$E = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 P^2}\ .$$

Запишем законы сохранения энергии и импульса при столкновении фотона с электроном, а индексами «н» и «к» отметим начальное и конечное значения импульсов электрона и фотона:

$$E(P_{\text{н}}) + \varepsilon(p_{\text{н}}) = E(P_{\text{к}}) + \varepsilon(p_{\text{к}}),\ \vec{P}_{\text{н}} + \vec{p}_{\text{н}} = \vec{P}_{\text{к}} + \vec{p}_{\text{к}}\ .$$

Расчет изменения частоты фотона теперь не представляет труда. Принято результат этого расчета приводить не в виде уменьшения частоты, а в виде увеличения длины волны рентгеновских лучей:

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{к}} - \lambda_{\text{н}} = \left(\frac{2\pi\hbar}{m_e c}\right)(1 - \cos\theta)\ ,$$

где θ – угол рассеяния. Параметр размерности длины $2\pi\hbar/(m_e c) = 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ см называется *комптоновской длиной волны электрона*. Комптоновская длина волны определяет порядок величины эффекта Комптона. С развитием теории она стала играть важную роль при описании многих эффектов. Согласие измерений Комптона с формулой для $\Delta\lambda$ подтвердило, что фотон – настоящая частица. Как каждая частица, фотон обладает и импульсом, и энергией.

В 1927 году за открытие (1922 г.) эффекта, носящего его имя, А.Комптон получил Нобелевскую премию.

Оглядываясь назад, трудно оценить, как воспринималась сделанная работа тогда. Теперь кажется все очевидным. Какие могут быть сомнения? К счастью, сохранились высказывания современников открытия. Приведем концовку статьи Эйнштейна «Эксперимент Комптона»: «...Результат опыта Комптона показывает, что излучение ведет себя так, как если бы оно состояло из дискретных корпускул, не только в смысле передачи энергии, но и в смысле передачи количества движения [импульса]». А в тексте статьи есть абзац, усиливающий оценку работы Комптона и одновременно утверждающий алогичность ситуации в физике тех лет: «...Теперь мы имеем две теории света, обе необходимые и – как приходится признать сегодня – *существующие без всякой логической взаимосвязи*, несмотря на двадцать лет колоссальных усилий физиков-теоретиков. Квантовая теория света сделала возможной теорию атома Бора и объяснила так много фактов, что она *должна* содержать значительную долю истины. [...] *Чрезвычайную важность приобретает вопрос* о том, в какой степени частицам света, или квантам, следует приписывать свойства снарядов» (выделено мной – *М.К.*).

Обратим внимание на то, что в статье Эйнштейна нет слова *фотон*. Нет его и в публикации Комптона. Дело в том, что слово *фотон* «родилось» заметно позже, только в 1929 году, и ввел его в употребление американский физико-химик Гильберт Льюис (1875–1946).

Алогичность и странность физической картины микромира – мира атомных и субатомных частиц – побудила Луи де Бройля высказать в 1923 году совсем неожиданное соображение: движение частицы всегда сопровождается волной. Что это за волна, теория даже не пыталась объяснить, но характеристики волны указывала. Если E и $\vec{P}$ – энергия и импульс частицы, то частота волны Ω и волновой вектор $\vec{K}$ определяются так:

$$\Omega = \frac{E}{\hbar}\ \text{и}\ \vec{K} = \frac{\vec{P}}{\hbar}\ ,\ \text{или}\ \hbar\Omega = E\ \text{и}\ \hbar\vec{K} = \vec{P}\ .$$

Эти соотношения получили имя Луи де Бройля. Формально они не отличаются от уравнений, с помощью которых вводятся кванты света – фотоны. Если можно читать уравнение слева направо, то, очевидно, его можно читать и справа налево. Эта простая мысль – важное эвристическое соображение.

Высказано удивительное и неожиданное предположение. Казалось бы, надо немедленно поставить эксперимент и выяснить, имеет ли гипотеза де Бройля какое-либо отношение к действительности. Лишь через четыре года, в 1927 году, в США Клинтоном Дэвиссоном (1881–1958) и в Англии Джорджем Томсоном (1892–1975) была открыта дифракция электронов на кристалле, подтвердившая существование у электронов волновых свойств. За это открытие Дэвиссон и Томсон в 1937 году были удостоены Нобелевской премией.

Теоретические представления нередко опережают опыт. У них своя логика развития. В 1926 году Эрвин Шрёдингер (1887–1961) опубликовал работу, в которой сформулировал *волновое* уравнение, положившее начало одной из форм квантовой механики. Эта форма квантовой механики некоторое время именовалась *волновой механикой* и существовала наряду с *матричной механикой*. Волновая механика возникла почти одновременно с матричной, но все же чуть позже. Сначала считали, что придется выбирать между двумя формами квантовой механики. Потом не только убедились, что обе они хорошо приспособлены к описанию свойств микромира, но и пришли к выводу о полной их тождественности. Все свойства атома, которые он имеет, т.е. те, которые можно обнаружить в эксперименте и даже измерить, могут быть вычислены, найдены, предсказаны, используя решение уравнений квантовой механики. В какой именно форме, безразлично. Главное, решить задачу без ошибок.

Творцом матричной механики заслуженно считается Вернер Гейзенберг (1901–1976). В 1932 году за открытие квантовой механики в матричной форме (1925 г.) Гейзенберг получил Нобелевскую премию. Открытие, за которое были удостоены Нобелевской премии 1933 года Эрвин Шрёдингер и Поль Дирак, сформулировано так: «За открытие *новых форм* атомной теории» (выделено мной – *М.К.*). Главная заслуга Дирака – формулировка основ *релятивистской квантовой механики*. Но матричная квантовая механика, как и релятивистская квантовая механика, – за пределами нашего рассказа.

(Продолжение следует)

Чжен Шень

А.ВАСИЛЬЕВ

При дворе императоров династии Хань во I–II веках нашей эры в Сиани проживал астроном и математик Чжен Шень (Чжан Хэн, 78–139). Его взгляды на устройство Вселенной во многом предвосхитили будущие открытия Коперника, Кеплера и Галилея.

Уже в год назначения на должность придворного астронома Чжен Шень изготовил небесный глобус, который чудесным образом приводился в движение энергией падающей воды, а скрытые механизмы позволяли регулировать скорость вращения этого глобуса. Космос представлялся Чжен Шеню воплощением пустоты, в которой изредка попадаются разбросанные по ней небесные тела, Солнце представлялось ему огнем, излучающим свет, а Луна – водой, отражающей его. Солнечные и лунные затмения, равно как и фазы Луны, он объяснял расположением Земли, Луны и Солнца относительно друг друга. По воспоминаниям современников, Чжен Шень придерживался гелиоцентрической системы мира, и его физическая картина устройства мира не допускала существования хрустальных сфер, столь популярных в средневековой Европе.

Чжен Шеню приписываются многие изобретения древнего Китая, в том числе и первого летательного аппарата. Однако его несомненным шедевром явилось создание в 132 году первого сейсмографа.

Эта многократно описанная конструкция представляла собой бронзовый сосуд диаметром около двух метров, по периметру которого располагались восемь драконов. Челюсти драконов раскрывались при вздрагивании, и в пасти у каждого был спрятан шар. Внутри сосуда находился перевернутый маятник с тягами, присоединенными к головам драконов. Когда в результате подземного толчка маятник приходил в движение, тяга, соединенная с головой, обращенной в сторону толчка, раскрывала пасть дракона, шар из нее выкатывался и падал в открытый рот одной из восьми жаб, восседавших у основания сосуда. Прибор был настолько чувствительным, что улавливал подземные толчки, эпицентры которых находились за многие сотни километров от него. Например, однажды шар выпал из пасти одного из драконов, но жители Сиани не почувствовали никакого толчка. А через несколько дней посланники из Кансу, который находится на северо-востоке Поднебесной, доложили императору, что у них произошло серьезное землетрясение.

Расцвет науки в годы правления императоров династии Хань сменился ее полным застоем, когда наследники империи – государства Вей, Ву и Шу – стали выяснять отношения между собой. А после монгольского нашествия на Китай изобретения древности вообще отошли большей частью в область легенд.

Имеются отрывочные сведения о существовании сейсмографов в Персии XII века, но что касается Европы, то здесь сейсмограф был вновь изобретен лишь в начале XVIII века. Еще через полтора века Л.Пальмиери в Италии сконструировал ртутный сейсмограф, в котором U-образные трубки были расположены вдоль направлений сторон света (восток – запад, север – юг). При землетрясении ртуть замыкала электрические контакты в одной из трубок, в результате чего фиксировалось время события, а специальное устройство регистрировало движение поплавка в ртути.

Современные сейсмографы появились в конце XIX века. В них используется свойство инерции, т.е. способность сохранять первоначальное состояние покоя или равномерного движения. Главная часть такого сейсмографа – маятник, который представляет собой груз, подвешенный на пружине к кронштейну, который жестко крепится к корпусу. Корпус сейсмографа закреплен в твердой горной породе и при землетрясении приходит в движение. Барабан с бумажной лентой также прикреплен к корпусу сейсмографа. Когда почва колеблется при землетрясении, груз маятника отстает от ее движения.

Магнитуда землетрясения – т.е. интенсивность, оцениваемая по энергии сейсмических волн, – в наши дни измеряется по шкале Рихтера, предложенной американским сейсмологом Ч.Рихтером в 1935 году. В этой не имеющей верхнего предела логарифмической шкале наиболее сильные зарегистрированные землетрясения достигали почти 9 баллов. Таких землетрясений с начала инструментальных наблюдений было зарегистрировано всего два, причем оба – на дне мирового океана: одно у побережья Эквадора, а другое у берегов Японии. Всего в XX веке произошло около 3000 землетрясений с магнитудой более 7 баллов.

Изобретение Чжен Шеня, конечно, не в состоянии предотвратить землетрясение, но его идеи заложили основы целого направления современной науки – сейсмологии. Сейсмология же, накапливая и систематизируя факты, обладает в определенной мере предсказательной силой, указывая, в каких районах земли и с какой вероятностью возможны разрушительные землетрясения.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1991» или «Ф1998». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1991 и М1992 предлагались на XXVII Турнире городов, задача М1993 предлагалась на I Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, задача М1994 – на V Турнире математических боев памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М1991 – М1995, Ф1998–Ф2002

М1991. Имеется 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?

М.Малкин

М1992. На плоскости лежал куб. Его перекатили несколько раз через ребра так, что куб снова оказался на исходном месте той же гранью вверх. Могла ли при этом верхняя грань повернуться на 90° относительно своего начального положения?

И.Богданов

М1993. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, а X – произвольная точка, не лежащая на прямых AH, BH, CH. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AH, BH, CH в точках A_1, B_1, C_1, а прямые AX, BX, CX – в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

А.Заславский

М1994. а) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше 1,001 г. Докажите, что весь изюм можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г.

б) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше $(1+x)$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г?

И.Богданов, Е.Петров, Д.Карпов

М1995*. Докажите, что уравнение

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = m(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^4$$

не имеет решений в натуральных числах.

А.Иванов (Болгария)

Ф1998. Автомобиль едет по прямой дороге. За первый час пути его средняя скорость составила 50 км/ч, еще час он ехал со средней скоростью 70 км/ч, затем ровно час простоял в пробке. Остаток пути он ехал с постоянной скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

О.Простов

Ф1999. Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите, все время находясь над одной и той же точкой экватора («суточный» спутник). По совершенно непонятной причине спутник вдруг остановился (его скорость относительно центра Земли стала нулевой). Оцените время падения спутника на Землю с точностью не хуже 1%.

Р.Александров

Ф2000. В горизонтальном цилиндрическом сосуде находится порция гелия. Сосуд закрыт массивным поршнем, который может двигаться по горизонтали без трения. С газом в сосуде проводят два опыта: наружное давление увеличивают в три раза – один раз очень быстро, другой раз очень медленно. В каком из опытов конечный объем газа окажется меньше? Во сколько раз?

А.Газов

Ф2001. Очень тонкий непроводящий стержень длиной L равномерно заряжен по длине полным зарядом Q. Маленькое проводящее кольцо радиусом R сделано из очень тонкой проволоки, его центр совпадает с одним из концов стержня, а плоскость кольца перпендикулярна стержню. Заряд кольца q. С какой силой стержень действует на кольцо?

З.Рафаилов

Ф2002. К батарейке с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r подключают параллельно соединенные резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L. Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?

А.Теплов

Решения задач М1966–М1975, Ф1983–Ф1987

М1966. *Докажите, что если число* $\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}2\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}$ *делится на 11, то оно также делится и на 121.*

Воспользуемся признаком делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, делится на 11. Имеем $\underbrace{1\ldots1}_{n}2\underbrace{1\ldots1}_{n}=\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\cdot10^n+\underbrace{1\ldots1}_{n+1}=$ $=\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1$. Получаем, что как первый, так и второй сомножители делятся на 11 тогда и только тогда, когда n нечетно. Таким образом, если n нечетно, то оба сомножителя делятся на 11, и их произведение делится на 121. Если же n четно, то исходное число на 11 не делится.

В.Сендеров

М1967. *В наборе из одиннадцати попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых семи гирь больше суммарного веса четырех оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора.*

Ответ: 109.

Упорядочим веса гирь по возрастанию: $a_1<a_2<\ldots$ $\ldots<a_{11}$. Пусть $a_7=x$, тогда $a_6\le x-1$, $a_5\le x-2,\ldots$ $\ldots,a_1\le x-6$, $a_8\ge x+1,\ldots,a_{11}\ge x+4$. Так как $a_1+\ldots+a_7>a_8+a_9+a_{10}+a_{11}$, то $7x-21>4x+10$, т.е. $3x>31$, значит, $x\ge11$. Тогда $a_1+\ldots+a_7>a_8+\ldots$ $\ldots+a_{11}\ge4\cdot11+10=54$, откуда $a_1+\ldots+a_7\ge55$, и $a_1+\ldots+a_{11}\ge55+54=109$.

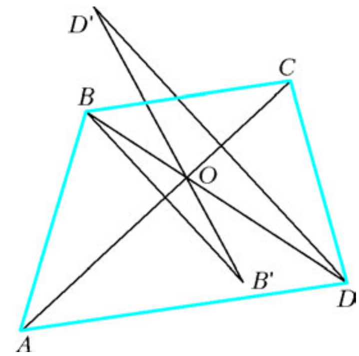
Суммарный вес 109 реализуется на наборе гирь {4, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15}.

О.Подлипский, И.Богданов

М1968. *Каждую вершину выпуклого четырехугольника Q отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Полученные точки являются вершинами четырехугольника Q'.*

а) Докажите, что если Q – трапеция, то Q' также является трапецией.

б) Докажите, что отношение площади Q' к площади Q меньше 3.



Пусть $ABCD$ – исходный четырехугольник, и пусть при отражении получаются точки A', B', C' и D'. Тогда отрезки BD и $B'D'$ симметричны относительно AC, поэтому они равны и пересекаются на прямой AC, а именно в точке O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (см. рисунок). Кроме того, $\frac{BO}{OD}=\frac{B'O}{OD'}$. Аналогично, AC проходит через O и $\frac{CO}{OA}=\frac{C'O}{OA'}$.

а) Если $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, то $\frac{BC}{AD}=\frac{BO}{OD}=\frac{CO}{OA}=k$ из подобия треугольников AOD и COB. Поэтому $\frac{B'O}{OD'}=\frac{C'O}{OA'}=k$, следовательно, треугольники $A'OD'$ и $C'OB'$ также подобны. Из их подобия получаем, что $B'C'\parallel A'D'$. Кроме того, заметим, что $\frac{B'C'}{A'D'}=k=\frac{BC}{AD}$, значит, Q' – не параллелограмм, если Q – не параллелограмм.

б) Пусть меньший угол между диагоналями был равен α, $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$, тогда после отражения один из углов между диагоналями становится равным либо 3α, либо $3\alpha-\pi$, поэтому отношение площадей равно

$$\frac{S'}{S}=\frac{A'C'\cdot B'D'\cdot|\sin3\alpha|}{AC\cdot BD\cdot\sin\alpha}=\frac{|\sin3\alpha|}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{|3\sin\alpha-4\sin^3\alpha|}{\sin\alpha}=|3-4\sin^2\alpha|.$$

Но $\sin^2\alpha\in(0;1]$, следовательно, $3-4\sin^2\alpha\in[-1;3)$, и $\frac{S'}{S}=|3-4\sin^2\alpha|<3$.

Л.Емельянов

М1969. *На оборотных сторонах 2005 карточек написаны различные числа (на каждой по одному). За один вопрос разрешается указать на любые три карточки и узнать множество чисел, написанных на них. За какое наименьшее число вопросов можно узнать, какие числа записаны на каждой карточке?*

Ответ: за 1003 вопроса.

Пусть было задано N вопросов. Ясно, что каждая карточка участвует хотя бы в одном вопросе, иначе число на ней мы не определим. Пусть есть k карточек, участвующих ровно в одном вопросе. Тогда в одном вопросе не может встретиться двух таких карточек. Действительно, если бы две такие карточки участвовали в одном вопросе, то, поменяв местами числа на этих карточках, мы не изменим ответов на вопросы; поэтому невозможно установить, какое число на которой из них написано. Следовательно, $k \le N$. Остальные карточки участвовали хотя бы в двух вопросах. Теперь, просуммировав для каждой карточки количество вопросов, в которых она участвовала, получим утроенное количество вопросов. Поэтому $3N \ge k + 2(2005 - k) = 4010 - k \ge 4010 - N$, откуда $2N \ge 2005$, $N \ge 1003$.

Приведем способ узнать числа за 1003 вопроса. Отложим одну карточку, а остальные разобьем на 334 группы по 6 карточек. В каждой группе занумеруем карточки числами от 1 до 6 и зададим три вопроса: $(1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$ и $(5, 6, 1)$. Тогда числа на карточках 1, 3, 5 встречаются в двух ответах (для разных карточек – в разных парах) и поэтому однозначно определяются, а числа на карточках 2, 4, 6 – оставшиеся числа в каждом из ответов. Так за $\frac{2004}{6} \times 3 = 1002$ вопроса мы узнаем числа на 2004 карточках. Осталось спросить про отложенную карточку вместе с любыми двумя уже известными.

И.Богданов

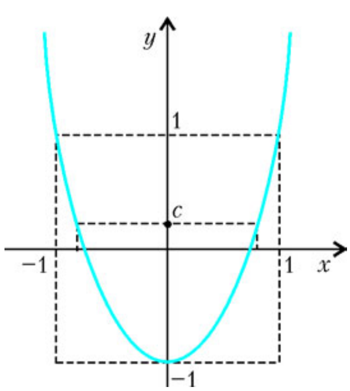
М1970. *Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что для любого целого положительного n уравнение $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n\ раз} = 0$ имеет ровно 2^n различных действительных корней?*

Ответ: существует.

Докажем, например, что трехчлен $f(x) = 2x^2 - 1$ удовлетворяет условию.

Введем обозначения: $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$.

Докажем индукцией по n следующее утверждение: если $-1 < c < 1$, то уравнение $f_n(x) = c$ имеет ровно 2^n корней на интервале $(-1; 1)$.



База ($n = 1$) ясна из рассмотрения графика (см. рисунок).

Пусть утверждение доказано для $n = k$, докажем его для $n = k + 1$. Уравнение $f_{k+1}(x) = c$, где $-1 < c < 1$, равносильно уравнению $f(f_k(x)) = c$, которое, очевидно, равносильно совокупности уравнений $f_k(x) = \alpha$, $f_k(x) = \beta$, где $-1 < \alpha < 1$ и $-1 < \beta < 1$ – корни уравнения $f(x) = c$. Каждое из этих уравнений имеет, по предположению индукции, ровно 2^k корней из интервала $(-1; 1)$. Эти группы корней не пересекаются, так как система уравнений $f_k(x) = \alpha$, $f_k(x) = \beta$ несовместна. Значит, уравнение $f_{k+1}(x) = c$ имеет ровно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ корней из интервала $(-1; 1)$, что и требовалось доказать.

Осталось заметить, что степень многочлена $f_n(x)$ равна 2^n, следовательно, он имеет не более 2^n корней. Но по доказанному выше $f_n(x)$ имеет не менее 2^n корней, т.е. имеет ровно 2^n корней.

С.Дориченко

М1971. *В таблице $2 \times n$ расставлены положительные числа так, что в каждом из n столбцов сумма двух чисел равна 1. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждом столбце так, чтобы в каждой строке сумма оставшихся чисел не превосходила $\frac{n+1}{4}$.*

Пусть в верхней строке стоят числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Переставим столбцы так, что $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Тогда в нижней строке стоят, соответственно, $b_1 = 1 - a_1$, $b_2 = 1 - a_2, \ldots, b_n = 1 - a_n$; ясно, что $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$. Если $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le \frac{n+1}{4}$, то вычеркнем все числа нижней строки. Иначе, найдем минимальный номер k такой, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_k > \frac{n+1}{4}$, вычеркнем в верхней строке числа $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$, а в нижней – $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$. По выбору k имеем $a_1 + \ldots + a_{k-1} \le \frac{n+1}{4}$. Остается доказать, что $b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n \le \frac{n+1}{4}$.

Поскольку $a_k \ge \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} > \frac{n+1}{4k}$, имеем

$$b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n \le (n+1-k)b_k =$$

$$= (n+1-k)(1-a_k) < (n+1-k)\left(1 - \frac{n+1}{4k}\right) =$$

$$= \frac{5}{4}(n+1) - \left[\frac{(n+1)^2 + (2k)^2}{4k}\right] \le$$

$$\le \frac{5}{4}(n+1) - \frac{2(n+1)(2k)}{4k} = \frac{n+1}{4}.$$

Е.Куликов

М1972. *На плоскости расположено бесконечное множество L прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что как бы ни расположить на плоскости квадрат со стороной 1, он будет пересекаться хотя бы с одной прямой множества L. Докажите, что найдется квадрат со стороной а) 0,8; б) 0,75, который пересекается не менее чем с тремя прямыми множества L.*

Докажем сразу более сильное утверждение пункта б).

Лемма. *Для любого $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ найдутся две прямые множества L, пересекающиеся под углом, меньшим φ.*

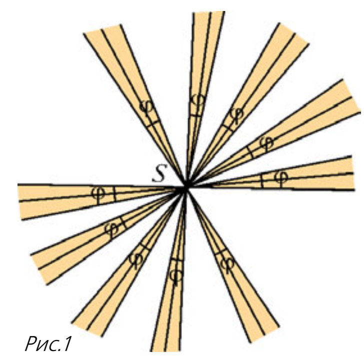


Рис.1

В самом деле, предположим противное – пусть любой угол между парой прямых больше некоторого $\varphi > 0$. Перенесем прямые параллельно так, чтобы они проходили через одну точку S. Все полученные прямые различны, так как в L нет параллельных прямых. Построим для каждой прямой l пару вертикальных углов величиной φ с вершиной в S, для которых l является биссектрисой (рис.1). Построенные углы не должны перекрываться (иначе угол между соответствующими прямыми меньше φ), значит, их количество не больше $2\pi/\varphi$, т.е. конечно – противоречие. Лемма доказана.

Обозначим за d длину диагонали квадрата со стороной 0,75. Заметим, что $d = 0{,}75\sqrt{2} > 1$.

Согласно лемме, выберем прямые l_1 и l_2 из L, пересекающиеся в некоторой точке O под таким углом α, что $0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \frac{d-1}{2}$. Отложим на лучах прямых l_1 и l_2, образующих угол α, отрезки OA, OM и OB, ON так, что $OA = OB$, $OM = ON$, $AB = d$, $MN = 1$ (рис.2).

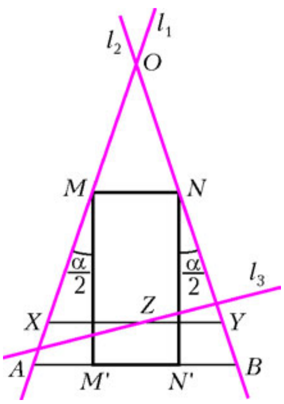


Рис.2

Обозначим через M' и N' проекции точек M и N на AB. Заметим, что

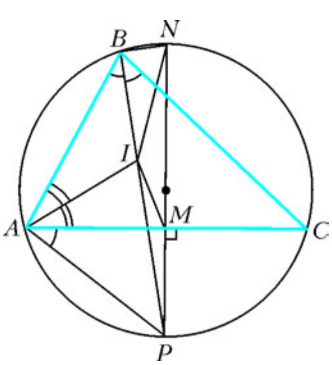
$$AM' = BN' = \frac{AB - M'N'}{2} = \frac{AB - MN}{2} = \frac{d-1}{2},$$

откуда $MM' = \dfrac{AM'}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} > 1$. Треугольник OAB покрывает прямоугольник $MNN'M'$ со сторонами $MN = 1$ и $MM' > 1$, поэтому строго внутри треугольника OAB можно расположить единичный квадрат, пересекаемый некоторой прямой l_3 множества L (l_3 отлична от l_1, l_2). Итак, внутри треугольника OAB есть точка Z, лежащая на прямой l_3.

Проведем через Z прямую, параллельную AB; она пересечет стороны OA и OB в точках X и Y. Длина отрезка XY меньше $AB = d$. Расположим квадрат со стороной 0,75 так, чтобы его диагональ покрывала отрезок XY. Этот квадрат искомый, поскольку содержит точки $X \in l_1$, $Y \in l_2$, $Z \in l_3$.

С.Волчёнков, П.Кожевников

М1973. *В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I – центр вписанной окружности, M – середина стороны AC, N – середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.*



Пусть NP – диаметр описанной окружности (см. рисунок). Тогда $\angle NBP = \angle NAP = 90°$, точка P – середина дуги AC, поэтому $\angle ABP = \angle CBP$, т.е. BP – биссектриса $\angle ABC$. Следовательно, I лежит на BP. Диаметр NP является серединным перпендикуляром к отрезку AC, следовательно, NP проходит через M. Так как $\angle AIP$ – внешний для ΔAIB, то

$$\angle AIP = \angle BAI + \angle ABI = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2} =$$

$$= \angle IAC + \angle CBP = \angle IAC + \angle CAP = \angle IAP.$$

Получаем, что ΔAPI – равнобедренный ($AP = IP$). Отрезок AM – высота прямоугольного треугольника NAP, поэтому $\frac{AP}{MP} = \frac{NP}{AP}$ и $\frac{IP}{MP} = \frac{NP}{IP}$. Из последнего равенства следует подобие треугольников PMI и PIN, откуда получаем $\angle PMI = \angle PIN$.

Но $\angle IMA = \angle PMI - 90°$, а из прямоугольного ΔBNI следует $\angle INB = \angle PIN - \angle IBN = \angle PIN - 90°$.

А.Бадзян

М1974. *На бесконечном белом листе клетчатой бумаги конечное число клеток окрашено в черный цвет так, что у каждой черной клетки четное число (0, 2 или 4) белых клеток, соседних с ней по стороне. Докажите, что каждую белую клетку можно покрасить в красный или зеленый цвет так, чтобы у каждой черной клетки стало поровну красных и зеленых клеток, соседних с ней по стороне.*

Введем координаты так, чтобы множество центров клеток совпадало с множеством точек, имеющих целые координаты. Будем считать, что окрашены не клетки, а целочисленные точки. Соединим пары соседних черных точек отрезками единичной длины. По условию, из каждой черной точки выходит четное число отрезков. Идея раскраски состоит в следующем. Можно показать, что объединение проведенных отрезков разбивает плоскость на области, которые можно покрасить в два цвета – желтый и синий – так, чтобы области, граничащие по отрезку, имели разные цвета. Далее, покрасим зеленым в синих областях точки с четной абсциссой, а в желтых – с нечетной абсциссой. Остальные клетки покрасим красным (рис. 1).

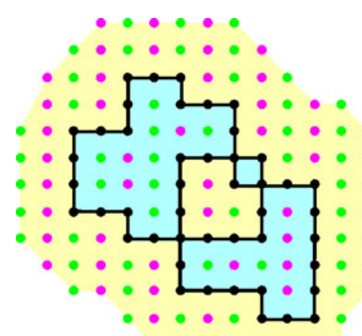


Рис.1

Проведем формальные рассуждения. Вначале окрасим все белые точки «в полоску», т.е. так, чтобы зеленые точки имели нечетную абсциссу, а красные – четную.

Начнем движение по отрезкам из какой-то черной точки A_1, при этом образуется последовательность черных точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$, в которой каждая точка соединена отрезком со следующей. Войдя в черную точку по некоторому отрезку, мы сможем выйти по другому отрезку (поскольку число выходящих из точки отрезков четно), пока в первый раз не попадем в вершину A_n, в которой уже раньше побывали (т.е. $A_n = A_k$ для некоторого $k < n$). Тем самым, найден цикл $A_k A_{k+1} A_{k+2} \ldots A_n$ из отрезков, который ограничи-

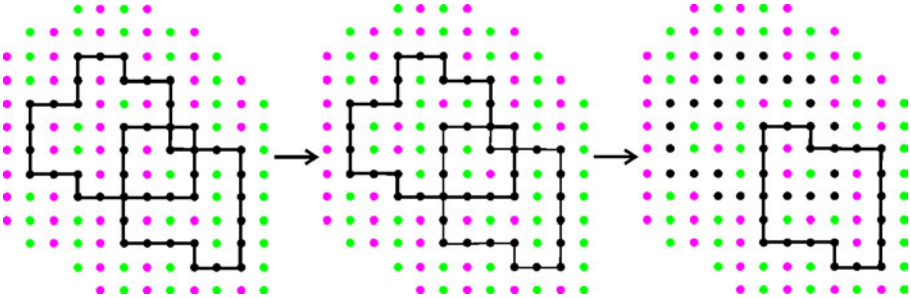


Рис. 2

вает на плоскости многоугольник X. Изменим цвет у всех красных и зеленых точек, лежащих внутри X, а отрезки $A_kA_{k+1}, A_{k+1}A_{k+2}, \ldots, A_{n-1}A_n$ сотрем. В оставшейся системе отрезков из каждой черной точки также выходит четное число отрезков, поэтому снова найдем цикл, ограничивающий многоугольник, произведем перекрашивание внутри многоугольника и сотрем отрезки, ограничивающие многоугольник. Действуем так до тех пор, пока все отрезки не будут стерты (шаги перекрашивания показаны на рисунке 2).

Докажем, что полученная в конце раскраска удовлетворяет условию.

Если у черной точки P четыре белых соседа, то при каждом перекрашивании они находились либо все внутри многоугольника, либо все – вне, а значит, перекрашивались одинаковое число раз. Тогда у P по два красных и зеленых соседа, поскольку так было в начальной раскраске.

Пусть у черной точки P два белых соседа K и L и два черных соседа M и N.

Первый случай: если K и L – соседи по диагонали (рис.3), то при каждом перекрашивании отрезок KL

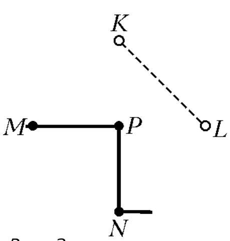


Рис. 3

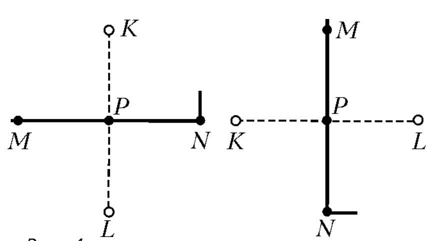


Рис. 4

находится либо весь внутри многоугольника, либо весь – вне. Поэтому K и L перекрашивались одинаковое число раз, и значит, одна из них зеленая, другая – красная, как это было вначале.

Второй случай: если K и L лежат в одной горизонтали или в одной вертикали (рис.4), то при перекрашивании внутри многоугольника, граница которого содержит путь MPN, одна из точек K, L лежит внутри, а другая – вне многоугольника. При любом другом перекрашивании отрезок KL находится либо весь внутри многоугольника, либо весь – вне. Поэтому количество перекрашиваний точек K и L отличается на 1. Так как в начальной раскраске K и L одноцветны, то в конечной – разноцветны.

П.Кожевников

М1975. *а) За круглым столом сидят 100 представителей 50 стран, по двое от каждой страны. Докажите, что их можно разбить на две группы таким образом, чтобы в каждой группе было по одному представителю от каждой страны и каждый человек находился в одной группе не более чем с одним своим соседом.*

б) За круглым столом сидят 100 представителей 25 стран, по 4 представителя от каждой. Докажите, что их можно разбить на 4 группы таким образом, чтобы в каждой группе было по одному представителю от каждой страны и никакие двое из одной группы не сидели за столом рядом.*

Лемма. *Пусть среди 2n человек – представителей n стран, по двое от страны – у каждого человека не более одного знакомого. Тогда всех людей можно так разбить на две группы, чтобы в каждой из групп не было знакомых и было по одному представителю от каждой страны.*

Доказательство. Если есть люди, которые ни с кем не знакомы, то разобьем их на пары (их четное число, поскольку все остальные разбиваются на пары знакомых) и познакомим людей в каждой паре. Итак, можно считать, что у каждого человека ровно один знакомый. Выберем любого представителя A страны i и поместим его в первую группу, второго представителя этой же страны поместим во вторую группу, его знакомого – представителя, скажем, j-й страны – поместим снова в первую группу, второго представителя j-й страны – во вторую и так далее. Этот процесс остановится, когда очередной знакомый уже распределен; это возможно, только если этот знакомый – изначальный представитель A страны i, тогда он помещен в первую группу, что и требовалось.

Если еще остались люди, не распределенные по группам, повторим процесс и так далее. Лемма доказана.

а) Разобьем всех сидящих за столом на 50 пар соседей и объявим людей в каждой паре знакомыми. Применяя лемму, получаем нужное разбиение на группы.

б) Пусть каждая из 25 стран состоит из двух республик. Положим, среди четырех представителей каждой страны двое из одной республики и двое из другой. Разобьем всех сидящих за столом на 50 пар соседей и объявим людей из одной пары друзьями; соседей, не являющихся друзьями, объявим знакомыми (таким образом, у каждого два соседа – один друг и один знакомый). Тогда, используя лемму (для республик и друзей), разобьем всех людей на две группы по 50 человек так, что в каждой из групп нет пар друзей и есть по одному представителю от каждой из 50 республик (т.е. по двое от страны). Снова применив лемму, разобьем каждую из двух групп по 50 человек на две группы по 25 человек так, что в каждой из групп нет пар знакомых и есть по одному представителю от каждой страны.

С.Берлов

Ф1983. *В системе, изображенной на рисунке 1, все грузы одинаковые, блоки имеют пренебрежимо малые массы, нити очень легкие и нерастяжимые. В начальный момент грузы удерживают так, что нити натя-*

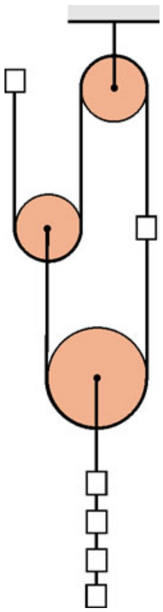


Рис. 1

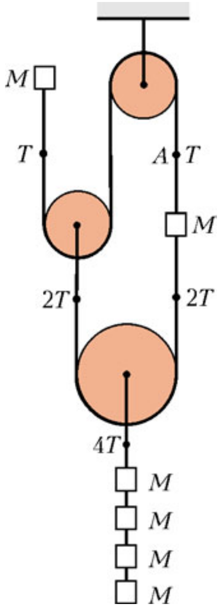


Рис. 2

нуты, а при их отпускании движение начинается без рывков. Найдите ускорения блоков. Свободные куски нитей вертикальны.

Обозначим силу натяжения нити в точке A буквой T, после этого можно сразу «нарисовать» остальные силы натяжения нитей (рис.2). Видно, что груз M наверху слева и груз M справа двигаются под действием одинаковых сил, значит, у них будут одинаковые ускорения – обозначим их буквой a. Сразу ясно, что «средний» блок имеет нулевое ускорение – если грузы M сдвинуть вниз на одинаковые расстояния, то этот блок должен будет остаться на месте. Тогда получается, что ускорение нижнего блока и груза $4M$, привязанного к нему, равно $0{,}5a$.

Теперь можно записать уравнения динамики для любого из грузов M и для нижнего груза общей массой $4M$:

$$T + Mg = Ma\,,\quad 4Mg - 4T = 4M\cdot 0{,}5a\,.$$

Отсюда получаем

$$a = \frac{4}{3}g \quad \text{и} \quad T = \frac{Mg}{3}$$

(мы проверяем, натянуты ли куски нити: если система устроена так, что нить окажется не натянутой, наши соотношения между ускорениями тел системы окажутся неверными).

Итак, два блока неподвижны, а ускорение нижнего блока равно $\frac{2}{3}g$.

А.Блоков

Ф1984. *Моль гелия находится в сосуде объемом 10 л при температуре 300 К. Объем газа увеличивают, при этом теплоемкость его во всем процессе равна $C = 1000$ Дж/К (и остается постоянной!). Оцените изменение температуры газа при его расширении в 20 раз.*

Теплоемкость $C = 1000$ Дж/(моль · К) – очень большая, поэтому температура газа изменяется в этом процессе совсем немного. Можно оценить работу газа приближенно, считая температуру T постоянной:

$$A = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1} =$$

$$= 1\ \text{моль}\cdot 8{,}3\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}\cdot 300\ \text{К}\cdot \ln 20 = 7460\ \text{Дж}\,.$$

Теперь можно найти изменение температуры:

$$C\Delta T = A + C_V\Delta T\,,$$

откуда

$$\Delta T = \frac{A}{C - C_V} = \frac{A}{C - \frac{3}{2}\nu R} \approx 7{,}5\ \text{К}\,.$$

Итак, температура газа увеличилась примерно на 7,5 К. Точное решение дает «добавку» приблизительно 0,15 К.

Р.Александров

Ф1985. *Батарейку напряжением $U = 6$ В с малым внутренним сопротивлением подключают к цепи, изображенной на рисунке 1. Конденсаторы имеют одинаковые емкости $C = 100$ мкФ, резисторы также одинаковые, сопротивлением $R = 10$ кОм каждый. Какой полный заряд протечет через «горизонтальный» резистор? Какое количество теплоты в нем выделится?*

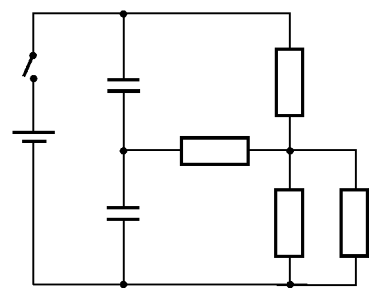


Рис. 1

Найдем потенциал точки соединения конденсаторов φ_1 как функцию заряда q, протекшего через «горизонтальный» резистор (рис.2):

$$C\varphi_1 + C(\varphi_1 - U) = -q\,,$$

откуда

$$\varphi_1 = \frac{U}{2} - \frac{q}{2C}\,.$$

Теперь найдем потенциал точки соединения всех рези-

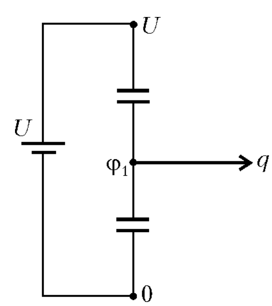


Рис. 2

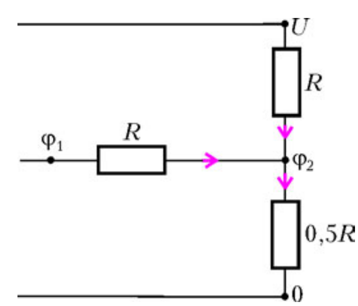


Рис. 3

сторов φ_2 в тот же момент (рис.3):

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} + \frac{U - \varphi_2}{R} = \frac{\varphi_2}{0{,}5R}\,,$$

откуда

$$\varphi_2 = \frac{1}{4}\varphi_1 + \frac{1}{4}U\,.$$

Разность потенциалов между этими точками равна

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{3}{4}\varphi_1 - \frac{1}{4}U = \frac{1}{8}U - \frac{3}{8}\frac{q}{C}\,.$$

Для того чтобы эта разность потенциалов упала до нуля, через «горизонтальный» резистор должен протечь заряд

$$Q = \frac{CU}{3} = 2\cdot 10^{-4}\ \text{Кл}\,.$$

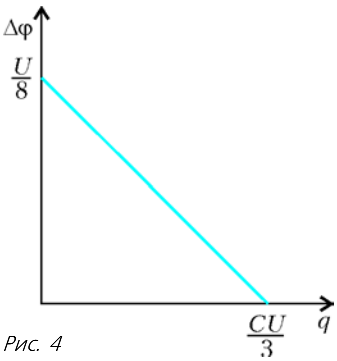


Рис. 4

Построим график зависимости $\Delta\varphi$ от q (рис.4). Площадь под этим графиком – это количество теплоты, выделившееся в резисторе:

$$W = \frac{1}{2}\frac{U}{8}\frac{CU}{3} = \frac{CU^2}{48} = 7{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{Дж}.$$

А.Зильберман

Ф1986. *Катушка содержит N = 1000 витков провода и намотана на тороидальный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью. Катушка включена в сеть переменного напряжения U = 36 В последовательно с резистором сопротивлением R = 100 Ом. От части катушки (n = 250 витков от одного из концов намотки) сделан отвод, и эта часть катушки замкнута проводником, имеющим очень малое сопротивление. Какой ток течет по этому проводнику? Рассеянием магнитного потока пренебречь. Сопротивление провода, которым намотана катушка, считать малым.*

Напряжение на замкнутой части катушки равно нулю. Но чтобы ЭДС индукции была нулевой, нужно, чтобы магнитный поток через эти витки не изменялся со временем. Для цепи переменного тока это означает, что магнитный поток равен нулю. Так может получиться в том случае, когда магнитные поля, создаваемые частями катушки, компенсируют друг друга. Для этого токи частей катушки должны течь навстречу друг другу и относиться по величине как 1:3 (ток меньшей части в три раза больше). Ток через «длинную» часть катушки определяется внешней частью цепи, поскольку ЭДС всей катушки тоже равна нулю:

$$I = \frac{U}{R} = 0{,}36\ \text{А}.$$

Ток через замыкающий проводник складывается из токов частей катушки (они текут навстречу друг другу) и равен

$$I_{\text{пр}} = 3I + I = 4I = 1{,}44\ \text{А}.$$

Можно было и сразу догадаться – автотрансформатор уменьшает напряжение в 4 раза, а ток при этом в 4 раза увеличивается.

З.Рафаилов

Ф1987. *Для уменьшения отражения света от поверхности линзы применяют просветляющий слой из материала с меньшим коэффициентом преломления, чем у стекла линзы. Расчет этого слоя обычно производят для длины волны 0,55 мкм, соответствующей зеленому цвету. Как изменится при этом отражение света для красного и фиолетового краев диапазона видимого света?*

Толщина просветляющего слоя составляет четверть длины волны интересующего нас зеленого света (убедитесь в этом самостоятельно). При этом запаздывание «прошедшей – отраженной – прошедшей назад» волны относительно «прошедшей» волны составляет половину длины волны, что соответствует изменению фазы на 180°, и происходит почти полная (ну, это в идеале!) компенсация отраженной волны.

Для красного (длина волны примерно 0,7 мкм) и фиолетового (примерно 0,4 мкм) краев диапазона видимого света запаздывание получится другим – примерно 0,4 длины волны для красного и 0,7 длины волны для фиолетового. Компенсации не получится – для фиолетового света отражение останется почти прежним, для красного оно уменьшится, но немного. В результате для «главного» участка спектра отражение света станет существенно меньше, чем без просветления. А это для цветной фотографии, например, весьма важно.

А.Светов

Задачи

1. А: — Ты лжец.
Б: — Что верно, то верно.
Кто есть кто?

А.Заславский

2. Известно, что среди чисел $a+b$, $a-b$, ab и $\frac{a}{b}$ три числа равны, а четвертое отлично от них. Какие значения могут принимать числа a и b?

Б.Френкин

3. На плоскости нарисовали четыре равных треугольника так, что любые два имеют ровно две общие вершины. Верно ли, что все они имеют общую вершину?

В.Гуровиц

4. В бесконечном городе все кварталы — квадраты одного размера. Велосипедист стартовал с перекрестка. Через полминуты за ним поехал другой велосипедист. Каждый едет с постоянной скоростью 1 квартал в минуту и на каждом перекрестке поворачивает либо направо, либо налево. Могут ли велосипедисты встретиться?

М.Вельтищев, П.Купцов

5. Два математика ехали в трамвае. Один постоянно смотрел в окно, другой дремал. При очередной остановке у светофора смотревший в окно воскликнул:

— Удивительное совпадение!

— Что такое? — проснулся второй.

— Представляешь, складывал я недавно два натуральных числа. Если бы я сделал все правильно, то сумма была бы равна номеру вон того «Мерседеса». Но я почему-то в первом слагаемом расположил цифры в обратном порядке, а у второго вообще пропустил одну цифру, и потому сумма оказалась равной номеру вон тех «Жигулей». Так вот скажи: сможешь ли ты определить, какую цифру я пропустил?

— Нет, — поразмыслив, ответил второй. — Этих данных недостаточно.

— Хорошо, добавлю: пропущенная цифра равна номеру дома, мимо которого мы проехали полчаса назад.

— Ну, тогда я могу назвать эту цифру.

Назовите и вы.

И.Акулич

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Рекордное количество участников, приехавших на одиннадцатый турнир заключительного этапа соревнований конкурса имени А.П.Савина, принял в конце июня 2005 года пансионат «Берендеевы Поляны» в окрестностях города Судиславля (Костромская область). Двадцать шесть команд школьников 6–9 классов из Костромы, Магнитогорска, Москвы, Омска, Перми, Снежинска, Троицка, Харькова на протяжении одной недели вели успешные сражения с трудными, но интересными задачами.

В организации этого мероприятия, кроме журнала «Квант», приняли участие Московский городской дворец детского (юношеского) творчества (председатель оргкомитета турнира Г.Кондаков), Департамент общего и профессионального образования администрации Костромской области, Костромской центр дополнительного образования одаренных школьников, Федерация профсоюзов Костромской области, Фонд математического образования и просвещения. Содействие турниру оказали также компания «Яндекс» и Клуб жен политиков «Подруги».

Как и ранее на подобных турнирах, школьникам предлагались преимущественно оригинальные задачи, специально подготовленные для данного турнира. В составе методической комиссии работали А.Блинков, В.Гуровиц, В.Сендеров, Д.Калинин, Б.Френкин, А.Скопенков, М.Галамов, М.Берштейн, Г.Мерзон, Т.Караваева, М.Вельтищев, Д.Вельтищев, А.Горская, А.Акопян. Варианты заданий для самых младших участников турнира подготовили Е.Чернышева и И.Раскина.

В работе жюри активное участие принимали руководители команд, многие из них входили в состав судейских бригад, помогали организовывать и проводить дополнительные интеллектуальные игры «Математическая регата», «Завалинка», «Что? Где? Когда?».

Турнир проводился по уже устоявшейся схеме. В первый день была организована командная олимпиада, по результатам которой команды ранжировались по лигам: первая лига 6–7 классов, высшая лига 7 классов, первая и высшая лиги 8–9 классов. Основу турнира составляли командные математические бои и устная личная олимпиада.

Призеры личной олимпиады

6 класс

Дудкин Александр – Харьков, ФМЛ 27,
Ивлев Федор – Троицк, Лицей,
Артемьев Михаил – Троицк, Гимназия (4 кл.),
Николаев Семен – Москва, школа 1189,
Ланина Наталья – Москва,
Василенко Никита – Москва,
Баранова Ксения – Москва,
Андреева Анна – Москва,
Артемьева Галина – Троицк, Гимназия,
Нуждин Даниил – Москва, школа 17,
Коломеец Иван – Москва;

7 класс

Соболев Евгений – Харьков, гимназия 47,
Таран Александр – Омск, ФМЛ 64,
Гусев Антон – Омск, ФМЛ 64,
Василенко Артем – Омск, ФМЛ 64,
Таранникова Катя – Москва, школа 2007,
Ефремов Дмитрий – Магнитогорск,
Лисичкин Владислав – Харьков, гимназия 47,
Соболев Дмитрий – Харьков, гимназия 47,
Маянцев Кирилл – Волгореченск, школа 3,
Мошкин Виталий – Магнитогорск,
Бичурин Игорь – Харьков, УВК 55,
Паламарчук Игорь – Москва,
Царьков Олег – Москва;

8 класс

Марченко Евгений – Москва, гимназия 1543,
Андреев Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Ромаскевич Елена – Москва, гимназия 1543,
Морозов Сергей – Москва, гимназия 1543,
Погребнов Алексей – Москва, гимназия 1543,
Кисловская Анна – Кострома, лицей 32,
Удимов Даниил – Москва, гимназия 1543,
Фурашова Мария – Кострома, лицей 32,
Чекалкин Серафим – Москва, гимназия 1543,
Гладков Игорь – Пермь, ФМЛ 9,
Демин Алексей – Москва, гимназия 1543,
Цой Светлана – Москва, школа 2007,

Марченко Денис – Пермь, ФМЛ 9,
Сильченко Анна – Москва, лицей «Вторая школа»,
Хатунцев Денис – Москва, гимназия 1543;

9 класс

Малеев Андрей – Снежинск, гимназия 127,
Селегей Даниил – Москва, гимназия 1543,
Кочерга Евгений – Снежинск, гимназия 127,
Арутюнов Владимир – Москва, гимназия 1543,
Хайруллин Егор – Пермь, ФМЛ 9,
Хлебников Федор – Москва, гимназия 1543,
Волков Федор – Москва, гимназия 1543,
Махлин Антон – Москва, гимназия 1543,
Котов Андрей – Москва, гимназия 1543,
Махлин Игорь – Москва, гимназия 1543,
Кухаренко Артем – Москва, гимназия 1543,
Истомин Алексей – Пермь, ФМЛ 9,
Рощупкин Александр – Москва, гимназия 1543,
Тимофеева Диана – Москва, гимназия 1543,
Шапцев Алексей – Пермь, ФМЛ 9,
Горбатов Роман – Снежинск, гимназия 127,
Реброва Лиза – Москва, гимназия 1543,
Соколов Иван – Москва, школа 91,
Кочанов Гоша – Москва, школа 91,
Осечкина Маша – Пермь, ФМЛ 9,
Лобода Иван – Снежинск, гимназия 127.

Специальную премию за самое быстрое решение топологической задачи (см. ниже задачу №1) получил четвероклассник из Троицка Михаил Артемьев.

Команды-призеры

7 класс

«Эврика», Харьков (руководитель А.Л.Берштейн),
школа 17, Москва (руководитель Д.А.Коробицын),
«Дворец-2», Москва (руководитель Г.В.Кондаков);

8–9 классы (высшая лига)

ФМЛ 9, Пермь (руководитель Г.А. Одинцова),
«1543, 8-2», Москва (руководитель. И.В.Раскина),
«1543, 9-1», Москва (руководитель А.В.Хачатурян),
«1543, 9-2», Москва (руководитель А.В.Хачатурян),
«1543–57», Москва (руководитель С.Е.Дубов);

8–9 классы (первая лига)

лицей «Вторая школа», Москва (руководитель Л.В.Санина),
школа 218, Москва (руководитель Ю.А.Блинков),
«1543, 8-1», Москва (руководитель И.В.Раскина),
Кострома (руководитель Н.Л.Чернятьев),
Магнитогорск (руководитель А.В.Христева).

Все победители награждены дипломами и призами, предоставленными журналом «Квант», Фондом математического образования и просвещения и компанией «Яндекс».

Избранные задачи турнира

(цифры в скобках указывают классы, для которых предлагалась соответствующая задача)

1 (6–7). Из книжки, состоящей из трех листов (рис.1), вырежьте лист Мёбиуса. (Листом Мёбиуса называется поверхность, которая получается при склеивании двух противоположных сторон AB и $A'B'$ прямоугольника $ABB'A'$ (рис.2) так, что точки A и B совмещаются с точками B' и A' соответственно.

Фольклор

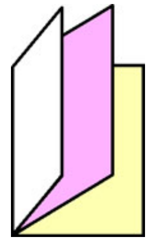


Рис.1

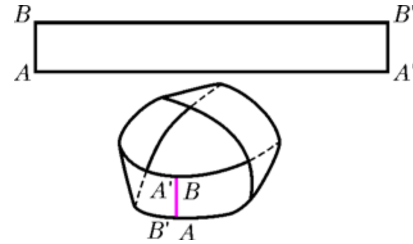


Рис.2

2 (6–7). Перед экзаменом Вася вырвал из учебника 20% страниц. Докажите, что если нумерация страниц начиналась с 1, то сумма номеров оставшихся страниц делится на 4.

В.Гуровиц

3 (6–7). В вершинах треугольника записано по натуральному числу, на каждой стороне треугольника – произведение чисел, записанных в его вершинах. Сумма всех семи чисел равна 1000. Какие числа записаны в вершинах треугольника?

А.Шаповалов

4 (6–7). Прямоугольник разрезан на нечетное количество равных частей. Верно ли, что они все являются прямоугольниками?

С.Маркелов

5 (8–9). На круглой арене цирка (не в ее центре) стоит тумба, на которой сидит лев. По команде укротителя лев спрыгивает с тумбы и бежит по прямой. Добежав до бортика, он поворачивает на $90°$, снова добегает до бортика, поворачивает на $90°$ и бежит дальше по арене. Докажите, что на арене можно положить кусок мяса так, что, независимо от первоначального направления движения, лев окажется в точке с мясом.

М.Панов

6 (8–9). Таблица 3×3 заполнена нулями. За один ход разрешается увеличить на единицу числа в трех клетках, образующих уголок любой ориентации. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все числа стали равными и положительными?

Р.Савченко

7 (7–9). В треугольнике есть сторона с длиной больше 1. Верно ли, что его можно разрезать на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона, равная 1?

А.Шаповалов

8 (8–9). Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка Q такая, что $\angle ABQ = \angle QDA$. Докажите, что $\angle BQA + \angle CQD = 180°$.

В.Произволов

9 (7). Пусть $S(n)$ – сумма всех делителей натурального числа n (включая 1 и само число). Для каких n выполняется равенство $S(2n) = 3S(n)$?

А.Блинков

10 (7–8). На доске записаны числа от 1 до n. Два игрока по очереди вычеркивают какое-нибудь число и все числа, не взаимно простые с ним (если такие существуют). Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Докажите, что найдется $n > 1000$ такое, что выигрышной стратегией обладает первый игрок.

Д.Григоренко

11 (7–9). На клетчатом листе по линиям сетки нарисован многоугольник, который можно разрезать на 30 квадратиков 2×2. Какое наибольшее количество трехклеточных уголков можно гарантированно из него вырезать?

Т.Караваева

12 (8–9). Положительные числа x, y таковы, что $x + y > 1$. Докажите, что $2\left(x^2 + y^2\right) > x + y$.

В.Сендеров

13 (9). У Пети был прямоугольный коврик с целочисленными сторонами, причем длина коврика кратна ширине. Петя разрезал его на части и сшил их так, что снова получился прямоугольный коврик, причем длина увеличилась на простое число p, а ширина осталась целочисленной. Найдите длину нового коврика.

Т.Караваева

14 (6–7). Василий пытается подобрать такое целое число a, что $a^2 = \overline{МЯУМЯУ}$, где $М$, $Я$, $У$ – некоторые цифры, $М \neq 0$. Удастся ли ему это сделать?

К.Лолита

15. а) (7–9) Найдите все такие натуральные числа x, что $x^2 = \overline{\underbrace{y\ldots y}_{n}\underbrace{z\ldots z}_{n}}$, где каждая из двух ненулевых цифр y и z повторена n раз, $n > 1$.

б) (8–9) Найдите все такие целые числа x, что $x^2 = \overline{yyzztt}$, где y, z, t – некоторые цифры, $y \neq 0$.

В.Сендеров

16 (9). Существуют ли два треугольных числа, больших чем 10^{100}, сумма которых также является треугольным числом? (Треугольными называют числа, представимые в виде $\frac{n(n+1)}{2}$, где n – натуральное.)

В.Произволов, В.Сендеров

17 (8–9). Для каких натуральных n существуют n таких различных натуральных чисел, что произведение сумм цифр этих чисел равно сумме произведений их цифр?

И.Акулич

18 (7–9). В магазине продаются гирлянды лампочек, соединенных по кругу. Лампочки можно зажигать по одной в произвольном порядке. Назовем *связанными* лампочки, между которыми находится ровно $k \geq 0$ лампочек. Если при включении какой-либо лампочки обе связанные с ней уже горят, то одну из них (любую по желанию) требуется погасить, если же горит только одна из связанных с ней, то ее нужно погасить.

а) Какое наибольшее количество лампочек можно зажечь таким способом, если $k = 0$, а n – любое натуральное число, большее 2?

б) Имеются гирлянды с любым количеством лампочек от 25 до 100. На гирлянде какой длины можно зажечь больше всего лампочек, если $k = 11$?

А.Малеев

19 (7). В 100-этажном доме испорчен лифт. Он может либо подниматься при нажатии одной кнопки на 79 этажей вверх, либо при нажатии другой – опускаться на 21 этаж вниз. Когда сверху меньше 79 этажей, лифт вверх не пойдет, аналогично – вниз. Лифт отправляется с первого этажа. Какое наименьшее количество раз надо нажать кнопки, чтобы лифт вернулся на первый этаж?

А.Спивак

20. а) (7) Можно ли разрезать заданный треугольник на два треугольника так, что в каждом из них можно отметить по равной стороне, причем отмеченные стороны не лежат на одной прямой?

б) (8–9) Разрежьте заданный треугольник на три треугольника так, что в них можно отметить по равной стороне, причем никакие две из трех отмеченных сторон не лежат на одной прямой.

в) (8–9) Можно ли с помощью циркуля и линейки построить разбиение произвольного треугольника на четыре треугольника так, что в них можно отметить по равной стороне, причем никакие две из четырех отмеченных сторон не лежат на одной прямой и не параллельны друг другу?

А.Шаповалов, В.Сендеров, Б.Френкин

21 (8–9). В строку выписывается последовательность натуральных чисел. Каждый следующий член, начиная со второго, вычисляется по следующему правилу:

1) если в предыдущем числе нет одинаковых цифр, то к предыдущему числу прибавляется количество его цифр;

2) если в предыдущем числе есть одинаковые цифры, то из предыдущего числа вычитается двойка.

Докажите, что начиная с определенного места последовательности числа станут периодически повторяться.

А.Жуков

Публикацию подготовили
А.Жуков, М.Вельтищев, Д.Вельтищев
Фотографии представил Д.Калинин

Центр масс механической системы

В.МОЖАЕВ

Рассмотрим произвольную механическую систему твердых тел с заданным взаимным расположением в пространстве и с известными массами. Поступательное движение такой системы под действием внешних сил эквивалентно движению материальной точки, имеющей массу, равную массе системы, и находящейся под воздействием результирующей силы всех внешних сил. Геометрическую точку, в которой располагается эта материальная точка, называют центром инерции или центром масс данной системы. Для произвольной неподвижной прямоугольной системы координат (ее называют также лабораторной системой) координаты центра масс определяются следующими формулами:

$$x_ц = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\,,\quad y_ц = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i\,,\quad z_ц = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i\,,$$

где m_i, x_i, y_i, z_i – массы и координаты центров масс тел, входящих в систему, а M – суммарная масса всех тел.

Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс остается неподвижным или движется прямолинейно с некоторой постоянной скоростью (в зависимости от предыстории). В этом случае удобно рассматривать движение тел под действием внутренних сил в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс. В такой системе отсчета импульс системы равен нулю и будет оставаться нулевым при любых взаимодействиях между телами системы.

Перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. *Определите, какую часть своей кинетической энергии теряет частица массой m_1 при упругом лобовом столкновении с неподвижной частицей массой m_2.*

Пусть скорость налетающей частицы массой m_1 равна v_1, тогда скорость движения центра масс системы будет равна

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\,.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс нашей системы. В этой системе скорость частицы массой m_1 равна

$$v_{1ц} = v_1 - u = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2}\,,$$

а скорость частицы массой m_2 составляет

$$v_{2ц} = -u = -\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\,.$$

За положительное направление выбрано направление скорости первой частицы. Получается, что в системе центра масс мы имеем уже другую ситуацию: обе частицы движутся навстречу друг другу с равными по величине импульсами

$$p = \frac{m_1 m_2 v_1}{m_1 + m_2}\,.$$

Когда частицы встретятся, возможны три варианта:

1) частицы не провзаимодействуют и пролетят, сохраняя свои скорости и импульсы;

2) произойдет нецентральный упругий удар, при котором частицы разлетятся, также сохраняя свои скорости и импульсы, но уже лежащие на прямой, проходящей по одному из диаметров сферы с центром в точке столкновения;

3) произойдет центральный упругий удар, при котором скорости и импульсы частиц также остаются неизменными по величине, но меняют свои направления на противоположные.

Найдем скорости наших частиц после центрального удара, но уже снова в неподвижной системе координат, где скорость частицы массой m_1 до удара была v_1. После удара первая частица будет двигаться со скоростью

$$v_1' = u - v_{1ц} = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}\,,$$

а вторая – со скоростью

$$v_2' = u - v_{2ц} = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}\,.$$

До удара кинетическая энергия налетающей частицы в неподвижной системе координат была

$$E_к = \frac{m_1 v_1^2}{2}\,,$$

а после удара стала

$$E_к' = \frac{m_1 (v_1')^2}{2} = \frac{m_1 (m_1 - m_2)^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2}\,.$$

Потеря кинетической энергии равна

$$\Delta E_к = E_к - E_к' = \frac{2m_1^2 m_2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\,,$$

что составляет от начальной энергии долю

$$\alpha = \frac{\Delta E_к}{E_к} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4\,m_1/m_2}{(1 + m_1/m_2)^2}\,.$$

Зависимость α от отношения m_1/m_2 изображена на рисунке 1. При $m_1 = m_2$ $\alpha = 1$, т.е. происходит полная потеря

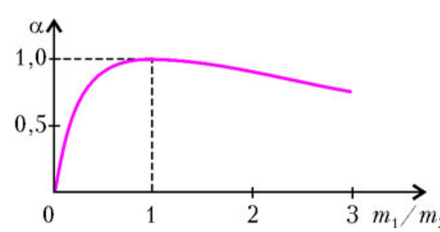


Рис. 1

энергии. При уменьшении отношения m_1/m_2 α уменьшается и при $m_1/m_2 \to 0$ доля теряемой энергии также стремится к нулю. Вот почему, например, в ядерных реакторах для замедления нейтронов используется рассеяние их на ядрах легких атомов – дейтерия, углерода. Для дейтерия, ядро которого состоит из протона и нейтрона, $m_1/m_2 = 0{,}5$ и $\alpha = 0{,}89$. В случае же ядра атома углерода $m_1/m_2 = 1/12$ и $\alpha = 0{,}28$.

Задача 2. *Две частицы, массы которых m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями. После упругого столкновения тяжелая частица отклоняется от направления своего первоначального движения на угол $\alpha = 30°$ в лабораторной системе отсчета или на угол $\beta = 60°$ в системе центра масс. Определите отношение m_1/m_2.*

Обозначим начальные скорости частиц в лабораторной системе координат через v_0. Тогда скорость движения центра масс нашей системы частиц будет

$$u = \frac{(m_1 - m_2)v_0}{m_1 + m_2}$$

– здесь за положительное направление выбрано направление скорости частицы массой m_1.

Перейдем в систему координат, связанную с центром масс. В этой системе скорость частицы массой m_1 до столкновения равна

$$v_{1ц} = v_0 - u = \frac{2m_2v_0}{m_1 + m_2}.$$

Аналогичная скорость частицы массой m_2 составляет

$$v_{2ц} = -(v_0 + u) = -\frac{2m_1v_0}{m_1 + m_2}.$$

Импульсы частиц в этой системе координат равны по величине:

$$p_{1ц} = p_{2ц} = \frac{2m_1m_2v_0}{m_1 + m_2}$$

и направлены в противоположные стороны как до соударения, так и после него. Но после соударения импульсы частиц лежат на прямой, которая составляет угол β с направлением первоначального движения.

На рисунке 2 изображена векторная диаграмма импульсов для частицы массой m_1. На этой диаграмме прямая AA'

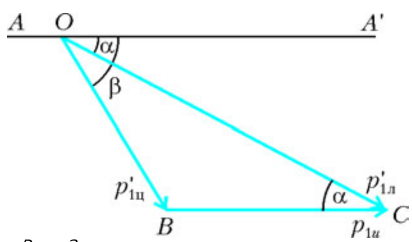


Рис. 2

соответствует направлению первоначального движения частиц. Отрезок OB равен импульсу частицы массой m_1 в системе центра масс после столкновения, отрезок OC равен импульсу этой же частицы после соударения, но уже в лабораторной системе отсчета. А вот отрезок BC – это импульс, который добавляется при переходе из системы центра масс в лабораторную систему, величина этого импульса равна

$$p_{1u} = m_1u = \frac{m_1(m_1 - m_2)v_0}{m_1 + m_2}.$$

При заданных значениях углов α и β треугольник OBC оказывается равнобедренным, поскольку $\angle BOC = \beta - \alpha = 30°$, а $\angle BCO = \alpha = 30°$ ($BC \parallel AA'$). Из этого следует, что $OB = BC$, или

$$\frac{2m_1m_2v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(m_1 - m_2)v_0}{m_1 + m_2},$$

откуда получаем

$$\frac{m_1}{m_2} = 3.$$

Задача 3. *На прямолинейную горизонтальную спицу насажены два шарика, которые могут скользить по ней без трения (рис.3). К шарику массой m прикреплена легкая пружина жесткостью k. Эта система неподвижна, а шарик массой 2m движется со скоростью v_0. Определите скорость шарика массой 2m после отрыва от пружины и время контакта этого шарика с пружиной. Радиусы шаров много меньше длины пружины.*

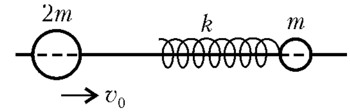


Рис. 3

Скорость центра масс в лабораторной системе координат составляет

$$u = \frac{2}{3}v_0.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс. Скорость шарика массой $2m$ до взаимодействия с пружиной в этой системе равна

$$v_{1ц} = v_0 - u = \frac{v_0}{3},$$

а скорость шарика массой m направлена в противоположную сторону и равна по величине

$$v_{2ц} = u = \frac{2}{3}v_0.$$

Как только шарик массой $2m$ достигнет пружины, скорости шариков начнут уменьшаться, а пружина будет сжиматься. В некоторый момент, когда вся кинетическая энергия шариков перейдет в потенциальную энергию упругой деформации пружины, шарики остановятся, а затем начнут ускоряться в противоположных направлениях. Когда пружина примет свою первоначальную длину, шарик массой $2m$ оторвется от пружины и будет иметь скорость, равную $v_{1ц}$ и направленную в другую сторону по отношению к первоначальной. Но это – скорость в системе центра масс, а нам нужно найти скорость этого шарика в лабораторной системе отсчета.

Для этого перейдем обратно в лабораторную систему отсчета. В этой системе скорость шарика массой $2m$, очевидно, будет равна

$$v_{1л} = u - v_{1ц} = \frac{v_0}{3}.$$

Относительная потеря кинетической энергии шарика составит

$$\alpha = \frac{v_0^2 - v_{1л}^2}{v_0^2} = \frac{8}{9}.$$

Для проверки воспользуемся результатом, полученным в задаче 1:

$$\alpha = \frac{4\,m_1/m_2}{(1 + m_1/m_2)^2} = \frac{8}{9}.$$

Это совпадение закономерно, поскольку данная задача является частным случаем задачи 1 при $m_1/m_2 = 2$.

Для ответа на второй вопрос заметим, что когда шарик массой $2m$ находится в контакте с пружиной, эта ситуация эквивалентна колебаниям шарика на горизонтально расположенной пружине, один конец которой закреплен. Закрепленным концом является центр масс, который остается неподвижным в системе отсчета, связанной с центром масс. Если длина нашей пружины l, то длина эквивалентной пружины составляет

$$l_{экв} = \frac{m_2l}{m_1 + m_2}.$$

Теперь нужно сообразить, чему будет равна жесткость пружины длиной $l_{экв}$, если жесткость исходной пружины k. Это право мы предоставляем читателю, а сами напишем готовый результат:

$$k_{экв} = \frac{lk}{l_{экв}} = \frac{(m_1 + m_2)k}{m_2} = 3k.$$

Очевидно, что время контакта шарика массой $2m$ с пружиной равно половине периода гармонических колебаний шарика на эквивалентной пружине:

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_{\text{экв}}}} = \pi \sqrt{\frac{2m}{3k}} .$$

Задача 4. *Клин массой 2m с углом наклона к горизонту α ($\cos\alpha = 2/3$) находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.4). Через блок, укрепленный на вершине клина, перекинута легкая нить, связывающая грузы массами m и 3m. Груз массой 3m может скользить вдоль вертикальной направляющей AB, закрепленной на клине. Этот груз вначале удерживают неподвижно на расстоянии H = 27 см от стола, а затем отпускают. На какое расстояние сместится клин к моменту касания груза массой 3m стола? Массами блока и направляющей AB пренебречь.*

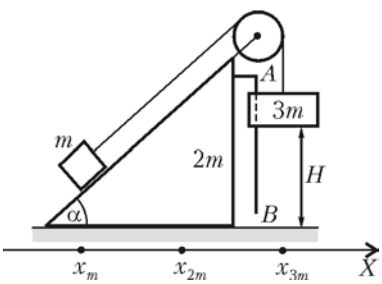


Рис. 4

После того как отпустили груз массой $3m$, на нашу систему тел в горизонтальном направлении (ось X) никакие внешние силы не действуют, поэтому горизонтальная координата центра масс системы будет оставаться неизменной. Пусть в произвольный момент времени (после освобождения груза массой $3m$) горизонтальные координаты центров масс трех тел будут такими: x_m – координата груза массой m, x_{2m} – координата клина, x_{3m} – координата груза массой $3m$ (начало отсчета – произвольное). Тогда горизонтальная координата центра масс системы будет равна

$$x_{\text{ц}} = \frac{mx_m + 2mx_{2m} + 3mx_{3m}}{m + 2m + 3m} .$$

Поскольку величина $x_{\text{ц}}$ остается постоянной, можно записать

$$x_m + 2x_{2m} + 3x_{3m} = \text{const} .$$

За время падения груза массой $3m$ происходит изменение всех трех координат, причем эти изменения будут связаны между собой соотношением

$$\Delta x_m + 2\Delta x_{2m} + 3\Delta x_{3m} = 0 ,$$

или, так как $\Delta x_{2m} = \Delta x_{3m}$,

$$\Delta x_m + 5\Delta x_{2m} = 0 .$$

Опускание груза массой $3m$ на величину H приводит к перемещению груза массой m вдоль наклонной плоскости также на H, а вдоль оси X – на $H\cos\alpha$. Но это – перемещение относительно клина, а полное горизонтальное перемещение груза массой m будет равно

$$\Delta x_m = H\cos\alpha + \Delta x_{2m} .$$

Тогда, с учетом соотношения между Δx_m и Δx_{2m}, для перемещения клина получим

$$\Delta x_{2m} = -\frac{H\cos\alpha}{6} = -\frac{H}{9} = -3 \text{ см} .$$

Знак «минус» означает, что клин сместится влево.

Задача 5. *Определите минимальное значение кинетической энергии α-частицы, необходимое для осуществления реакции*

$$^{4}\text{He} + {}^{7}\text{Li} \to {}^{10}\text{B} + n ,$$

если реакция идет с поглощением энергии Q = 2,85 МэВ. Ядро лития неподвижно.

До реакции мы имеем α-частицу, или ядро атома гелия, и ядро лития, а после реакции образуются ядро бора и нейтрон. Если мы подсчитаем суммарные энергии покоя частиц до реакции и после реакции, то увидим, что энергия покоя ядра бора и нейтрона больше, чем энергия покоя α-частицы и ядра лития. Эта разность как раз и равна поглощаемой энергии Q при данной реакции. Такие ядерные реакции, проходящие с поглощением энергии, называют эндотермическими реакциями. Реакции, идущие, наоборот, с выделением энергии, называют экзотермическими. Отсюда понятно, что если исходные частицы неподвижны, то эндотермическая реакция не пойдет. Значит, налетающая на мишень частица должна обладать некоторой минимальной энергией, при которой начнется реакция. Величину этой энергии называют пороговой.

Наиболее удобно рассмотреть процесс неупругого взаимодействия частиц в системе отсчета, связанной с центром масс системы. Обозначим скорость α-частицы в лабораторной системе отсчета через v_α. Тогда скорость движения центра масс равна

$$u = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_\alpha + m_{\text{Li}}} ,$$

где m_α и m_{Li} – массы α-частицы и ядра лития. Скорость α-частицы в системе центра масс составляет

$$v_{\alpha\,\text{ц}} = v_\alpha - u = \frac{m_{\text{Li}} v_\alpha}{m_\alpha + m_{\text{Li}}}$$

– здесь за положительное направление выбрано направление скорости α-частицы в лабораторной системе отсчета. Скорость ядра лития в системе центра масс равна

$$v_{\text{Li}\,\text{ц}} = -u = -\frac{m_\alpha v_\alpha}{m_\alpha + m_{\text{Li}}} .$$

В этой системе отсчета при пороговой скорости α-частицы образовавшееся ядро бора и нейтрон должны покоиться. Запишем закон сохранения полной энергии до реакции и после реакции:

$$m_\alpha c^2 + \frac{m_\alpha v_{\alpha\,\text{ц}}^2}{2} + m_{\text{Li}} c^2 + \frac{m_{\text{Li}} v_{\text{Li}\,\text{ц}}^2}{2} = m_{\text{B}} c^2 + m_n c^2$$

– энергии частиц здесь записаны для нерелятивистского случая. Подставляя в это уравнение выражения для $v_{\alpha\,\text{ц}}$ и $v_{\text{Li}\,\text{ц}}$ и учитывая, что

$$m_{\text{B}} c^2 + m_n c^2 - \left(m_\alpha c^2 + m_{\text{Li}} c^2\right) = Q ,$$

получим

$$\frac{m_\alpha m_{\text{Li}} v_\alpha^2}{2\left(m_\alpha + m_{\text{Li}}\right)} = Q .$$

Отсюда находим минимальную кинетическую энергию α-частицы в лабораторной системе отсчета:

$$E_k = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Li}}}\right) Q = 4{,}48 \text{ МэВ} .$$

Упражнения

1. Вдоль прямолинейной горизонтальной спицы могут скользить без трения две муфты. Муфта массой m с прикрепленной к ней легкой пружиной жесткостью k движется со скоростью v_0, а муфта массой $4m$ покоится (рис.5). Определите скорость муфты массой $4m$ после ее отрыва от пружины и время контакта этой муфты с пружиной. Размеры муфт много меньше длины пружины.

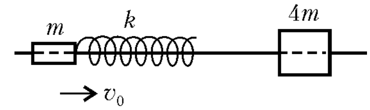


Рис. 5

2. На гладкой горизонтальной поверхности стола находится брусок в форме прямоугольного параллелепипеда, на котором укреплены ступенчатый блок с радиусами шкивов r и R ($R =$

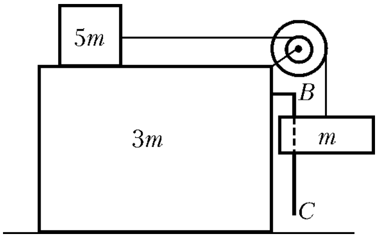


Рис. 6

$= 4r$) и вертикальная штанга BC (рис.6). На шкивы намотаны легкие нити, прикрепленные к грузам массами m и $5m$. Груз массой m может скользить вдоль штанги BC. Вначале груз массой $5m$ удерживают в покое, а затем отпускают. К моменту удара груза массой m о стол другой груз не достигает блока, а брусок за это время смещается на расстояние $s = 2{,}5$ см. На каком расстоянии от стола находился груз массой m вначале? Массами блока и штанги пренебречь.

3. Движущаяся частица претерпевает упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Докажите, что после столкновения, если оно не было лобовым, частицы разлетятся под прямым углом друг к другу.

4. Какова кинетическая энергия α-частицы, если при попадании в ядро азота ${}^{14}\mathrm{N}$ происходит реакция

$$ {}^{4}\mathrm{He} + {}^{14}\mathrm{N} \to {}^{17}\mathrm{O} + {}^{1}\mathrm{H}\,, $$

сопровождающаяся поглощением энергии $Q = 1$ МэВ, а образовавшийся протон покоится в лабораторной системе отсчета?

Семейства функций

В.ГОЛУБЕВ, К.МОСЕВИЧ

В ТЕЧЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ДЕСЯТИЛЕТИЙ В ПРАКТИКЕ вступительных экзаменов регулярно появляются задачи, в которых из данного семейства функций требуется выделить те, чьи множества значений удовлетворяют объявленным условиям.

Ниже мы укажем идеи решения наиболее популярного класса подобных задач.

Пусть для данного значения параметра a рассматривается функция

$$ y_a(x) = f(x; a)\,. $$

Будем говорить, что задано семейство функций $\{y_a\}$, где a принимает все допустимые значения. Выделим типы основных задач.

Первая основная задача. *Найти все значения параметра a, при которых множество значений функции $f(x; a)$ содержит данный отрезок (интервал, полуинтервал, луч и т.д.).*

Вторая основная задача. *Найти все значения параметра a, при которых множество значений функции $f(x; a)$ не содержит ни одного значения из данного отрезка (интервала, полуинтервала, луча и т.д.).*

Ясно, что можно указать и другие регулярно встречающиеся типы основных задач. Более того, в силу взаимосвязи между основными задачами, можно иногда одну из них сформулировать в виде другой.

Наш выбор основных задач предопределен практикой вступительных экзаменов, где эти задачи наиболее часто в подобном виде и присутствуют.

Способы решения основных задач

Принято выделять следующие способы решения.

Первый способ – *способ определения $E(y_a)$, т.е. множества значений функции $f(x; a)$ при данном a.*

Суть этого способа состоит в непосредственном исследовании функции с целью нахождения множества ее значений и получения ответа на вопрос, является ли оно искомым или нет в данной основной задаче.

Этот способ – самый громоздкий по объему работы, поскольку требуется предварительная полная классификация возможных вариантов, в зависимости от параметра a, типов исследуемой функции и рассмотрение каждого варианта.

Второй способ – *способ определения условий существования корней уравнения*

$$ y = f(x; a) \qquad (1) $$

относительно x (считая переменные y и a параметрами этого уравнения) при сформулированных требованиях к переменной y.

Этот способ – наиболее естественный для понимания всех действий при его использовании и наиболее часто демонстрируемый в литературе.

Третий способ – *решение равенства (1) относительно параметра a.*

Это – очень известный способ в задачах с параметром, требующий, однако, наиболее высокой культуры при его использовании.

Для понимания излагаемого в дальнейшем текста крайне важно отдавать себе отчет, с какими функциями из семейства $\{y_a\}$ мы имеем дело, когда фиксируем значение какой-нибудь из трех переменных в равенстве (1).

Вариант $a = c$: рассматривается **одна** функция $y(x) = f(x; c)$ из семейства $\{y_a\}$.

Вариант $x = c$: рассматриваются **все** функции из семейства $\{y_a\}$, для которых c принадлежит их области определения.

Вариант $y = c$: рассматриваются **все** функции из семейства $\{y_a\}$, для которых c принадлежит множеству их значений.

Обсудим теперь подробнее решения конкретных задач всеми способами.

Примеры решения задач первым способом

Задача 1. *Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция*

$$ f(x) = \frac{4x + a}{4a - 2x} \qquad (2) $$

на промежутке $[-1; 1]$ принимает все значения из отрезка $[0; 1]$.

Решение. Выделим в равенстве (2) целую часть:

$$ f(x) = \frac{4x + a}{4a - 2x} = \frac{(4x - 8a) + 9a}{4a - 2x} = -2 + \frac{9a}{4a - 2x}\,. $$

Отсюда следует, что графиком функции $f(x)$ является либо гипербола ($a \ne 0$), либо прямая без точки. При этом если

$a < 0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на лучах $(-\infty; 2a)$ и $(2a; +\infty)$, а если $a > 0$, то функция монотонно возрастает на этих лучах. Если же $a = 0$, то $f(x) = -2$ на всей области определения $x \neq 0$. Поэтому очевидно, что искомые значения параметра не равняются нулю.

Поскольку нас интересуют значения функции только на отрезке $[-1; 1]$, то классификация ситуаций определяется тем, как асимптота $x = 2a$ гиперболы ($a \neq 0$) располагается относительно этого отрезка.

Случай 1. Все точки промежутка $[-1; 1]$ находятся справа от вертикальной асимптоты $x = 2a$, т.е. $2a < -1$.

Случай 2. Вертикальная асимптота пересекает промежуток $[-1; 1]$, и функция убывает (как и в случае 1), т.е.

$$\begin{cases} -1 \le 2a \le 1, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le a < 0 .$$

Случай 3. Вертикальная асимптота пересекает промежуток $[-1; 1]$, и функция возрастает, т.е.

$$\begin{cases} -1 \le 2a \le 1, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \le \frac{1}{2} .$$

Случай 4. Все точки промежутка $[-1; 1]$ находятся слева от вертикальной асимптоты, т.е.

$$1 < 2a \Leftrightarrow a > \frac{1}{2} .$$

На следующем этапе для каждого из четырех случаев находим множество значений функции на отрезке $[-1; 1]$ в точках, где она определена. Это нетрудно сделать, учитывая монотонность нашей функции.

Упражнение 1. Докажите, что

для случая 1

$$E(f) = [f(1); f(-1)] = \left[\frac{4+a}{4a-2}; \frac{-4+a}{4a+2}\right];$$

для случая 4

$$E(f) = [f(-1); f(1)] = \left[\frac{-4+a}{4a+2}; \frac{4+a}{4a-2}\right].$$

Так как в задаче речь идет о значениях функции из отрезка $[0; 1]$, то для случая 2 мы рассматриваем функцию только на полуинтервале $(2a; 1]$ ($f(x) < -2$ при $x < 2a$). Аналогично, для случая 3 мы рассматриваем функцию только на полуинтервале $[-1; 2a)$.

Упражнение 2. Докажите, что на указанных полуинтервалах

для случая 2

$$E(f) = [f(1); +\infty) = \left[\frac{4+a}{4a-2}; +\infty\right);$$

для случая 3

$$E(f) = [f(-1); +\infty) = \left[\frac{-4+a}{4a+2}; +\infty\right).$$

Осталось в каждом из четырех случаев написать условия включения отрезка $[0; 1]$ в промежуток найденного множества значений функции $f(x)$ и решить соответствующие системы неравенств:

$$1)\ \begin{cases} a < -\frac{1}{2}, \\ f(1) \le 0, \\ f(-1) \ge 1; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} -\frac{1}{2} \le a < 0, \\ f(1) \le 0; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 0 < a \le \frac{1}{2}, \\ f(-1) \le 0; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ f(-1) \le 0, \\ f(1) \ge 1. \end{cases}$$

Ответ задачи: $a \in [-2; 0) \cup (0; 2]$.

Чтобы полностью осознать трудоемкость способа непосредственного определения множества значений функции, решим указанным способом еще одну задачу.

Задача 2. *При каких значениях параметра a множество значений функции*

$$y = \frac{6x-12}{a-x^2} \qquad (3)$$

не содержит ни одного значения из отрезка $[-3; -1]$?

Решение. Поскольку числитель дроби в равенстве (3) при любом значении параметра a обращается в ноль при $x = 2$, то вся дальнейшая классификация ситуаций определяется квадратным трехчленом в знаменателе и выглядит следующим образом.

Случай 1: $a < 0$.

Случай 2: $a = 0$.

Случай 3: $\sqrt{a} < 2$ при $a > 0$.

Случай 4: $\sqrt{a} = 2$.

Случай 5: $2 < \sqrt{a}$.

Теперь подробнее.

Случай 1 ($a < 0$). При $a < 0$ знаменатель $a - x^2$ меньше нуля. Отсюда следует, что $y > 0$ при $x < 2$ и $y < 0$ при $x > 2$. Функция всюду непрерывна, а так как она принимает и положительные и отрицательные значения, то значение параметра искомое, если наименьшее значение функции будет больше наибольшего числа из отрезка $[-3; -1]$, т.е. когда

$$\min y(x) > -1 . \qquad (4)$$

Поскольку отрицательные значения функция принимает только при $x > 2$, то (!)

$$(4) \Leftrightarrow \min_{x>2} y(x) > -1 .$$

Вычислим $\min\limits_{x>2} y(x)$. Пусть $x - 2 = t$, $t > 0$ при $x > 2$, поэтому

$$\min_{x>2} y(x) = \min_{t>0} y(t) = \min_{t>0}\left((-6)\frac{t}{t^2+4t+4-a}\right) =$$

$$= (-6)\max_{t>0}\frac{t}{t^2+4t+4-a} = (-6)\max_{t>0}\frac{1}{\left(t+\frac{4-a}{t}\right)+4} .$$

Так как $4 - a > 0$ при $a < 0$ и $t + \frac{4-a}{t} \ge 2\sqrt{4-a}$, то

$$\max_{t>0}\frac{1}{\left(t+\frac{4-a}{2}\right)+4} = \frac{1}{2\sqrt{4-a}+4} \quad \left(t = \sqrt{4-a}\right),$$

и поэтому неравенство (4) принимает вид

$$\frac{-3}{\sqrt{4-a}+2} > -1 \Leftrightarrow a < 3 .$$

Значит, все отрицательные значения a являются искомыми.

Ответ в случае 1: $a < 0$.

Случай 2 ($a = 0$). Как и в случае 1 (проделайте самостоятельно), находим

$$\min_{x>2} y(x) = -\frac{3}{4} > -1 .$$

Ответ в случае 2: $a = 0$.

Случай 3 ($0 < a < 4$). Для указанных значений параметра

$$y = (-6)\frac{x-2}{\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right)},$$

и

$$y < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a} \text{ или } x > 2.$$

Множество значений функции на интервале $\left(-\sqrt{a}; \sqrt{a}\right)$ есть луч $\left(-\infty; M\right]$, а на луче $(2; +\infty)$ – полуинтервал $\left[m; 0\right)$ (докажите самостоятельно), при этом

$$M = \max_{-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}} y(x) = \frac{3}{2-\sqrt{4-a}}$$

и

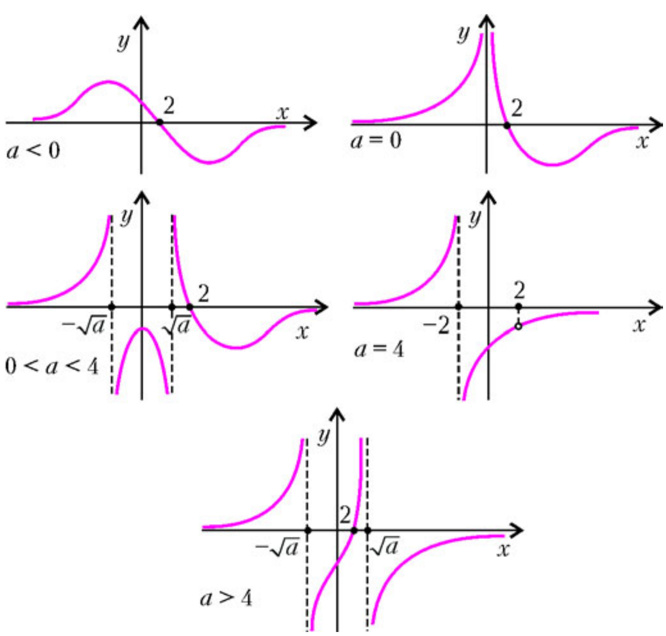
$$m = \min_{x>2} y(x) = \frac{-3}{2+\sqrt{4-a}}.$$

Поэтому искомые значения параметра в данном случае определяются из системы

$$\begin{cases} 0 < a < 4, \\ m > -1, \\ M < -3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 3.$$

Ответ в случае 3: $0 < a < 3$.

Аналогично исследуются ситуации в оставшихся двух случаях (проделайте самостоятельно). Для ориентации приводим эскизы графиков функции $y(x)$ для всех пяти случаев:



Ответ задачи: $a < 3$.

Упражнения

3. Найдите все значения параметра a, при которых множество значений функции

$$y = \frac{2x+4}{a+x^2}$$

будет содержать отрезок $[0; 1]$.

4 (МГУ, геологический ф-т, 1988)**.** Найдите все значения параметра a, при которых множество значений функции

$$y = \frac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1; 2]$.

Примеры решения задач вторым способом

Разберем те же задачи 1 и 2, но другим способом.

Задача 1. *Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция*

$$f(x) = \frac{4x+a}{4a-2x}$$

на промежутке $[-1; 1]$ принимает все значения из отрезка $[0; 1]$.

Решение. Рассмотрим данное равенство как уравнение относительно x. Тогда исходную задачу можно сформулировать в следующем равносильном виде.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$y = \frac{4x+a}{4a-2x} \qquad (5)$$

имеет хотя бы один корень на промежутке $[-1; 1]$ для любого значения y из отрезка $[0; 1]$.

В таком случае

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y+2)x = a(4y-1), \\ x \neq 2a. \end{cases}$$

При $x = 2a$ из уравнения этой системы следует, что $a = 0$. Так как при $a = 0$ равенство (5) принимает вид $y = -2$, то, очевидно, значение $a = 0$ не является искомым. При $a \neq 0$ равенство (5) равносильно уравнению системы.

Так как $2(y+2) \neq 0$ при $0 \le y \le 1$, то

$$(5) \Leftrightarrow x = a\frac{4y-1}{2(y+2)},$$

т.е. при данном y значение x определяется единственным образом. Поэтому для искомых значений параметра для любого $y \in [0; 1]$

$$-1 \le a\frac{4y-1}{2(y+2)} \le 1. \qquad (6)$$

При $4y - 1 = 0$ это двойное неравенство истинно при всех $a \neq 0$. При $4y - 1 \neq 0$

$$(6) \Leftrightarrow \left|a\frac{4y-1}{2(y+2)}\right| \le 1 \Leftrightarrow |a| \le \left|\frac{2(y+2)}{4y-1}\right| \qquad (7)$$

для всех $y \in \left[0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right]$. Поэтому

$$|a| \le \min\left|\frac{2(y+2)}{4y-1}\right|,$$

где минимум вычисляется на указанном множестве значений y. Поскольку (найдите самостоятельно) этот минимум равен двум, то

$$(7) \Leftrightarrow -2 \le a \le 2.$$

Ответ задачи: $-2 \le a < 0$ или $0 < a \le 2$.

Задача 2. *При каких значениях параметра a множество значений функции*

$$y = \frac{6x-12}{a-x^2} \qquad (8)$$

не содержит ни одного значения из отрезка $[-3; -1]$?

Решение. Данное равенство рассматриваем как уравнение относительно x:

$$(8) \Leftrightarrow \begin{cases} yx^2 + 6x - ay - 12 = 0, \\ x^2 \neq a. \end{cases}$$

Если $x^2 = a$, то из уравнения системы следует, что $x = 2$, откуда $a = 4$. При $a = 4$ $y = -\frac{6}{x+2}$ $(x \neq \pm 2)$. Так как y принимает все значения, кроме $y = 0$ и $y = -\frac{3}{2}$, то значение параметра $a = 4$ не является искомым.

Если $a \neq 4$, то

$$(8) \Leftrightarrow yx^2 + 6x - ay - 12 = 0.$$

Для искомых значений параметра необходимо и достаточно, чтобы квадратное относительно x уравнение не имело корней при всех $y \in [-3; -1]$. Это равносильно отрицательности дискриминанта для всех $y \in [-3; -1]$:

$$D < 0 \Leftrightarrow a < \frac{-12y - 9}{y^2},$$

т.е.

$$a < \min_{-3 \le y \le -1} \left(-9\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \min_{-1 \le t \le -\frac{1}{3}} \left(-9t^2 - 12t\right) = 3,$$

откуда $a < 3$.

Ответ задачи: $a < 3$.

Мы уже упоминали, что основные задачи естественным образом взаимосвязаны между собой. Посмотрите, как изящно можно решить задачу 2 от противного.

Решение от противного. Пусть a есть не искомое значение параметра. Это равносильно тому, что найдется хотя бы одно значение x_0, при котором значение функции, определяемой равенством (8), будет принадлежать отрезку $[-3; -1]$. А это в свою очередь равносильно существованию хотя бы одного решения двойного неравенства

$$-3 \le y \le -1 \Leftrightarrow (y+1)(y+3) \le 0.$$

Выражая y через x, получим, что неравенство

$$\left(\frac{6x - 12}{a - x^2} + 1\right)\left(\frac{6x - 12}{a - x^2} + 3\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2 - 6x - a + 12\right)\left(x^2 - 2x - a + 4\right)}{\left(x^2 - a\right)^2} \le 0 \quad (9)$$

должно иметь хотя бы одно решение.

Согласитесь, что неравенство (9) имеет хотя бы одно решение при неотрицательности хотя бы одного из дискриминантов квадратных трехчленов в числителе и взаимного расположения корней (если они существуют) всех трех квадратных трехчленов.

Упражнение 5. а) Докажите, что неравенство

$$\left(x^2 + p_1x + q_1\right)\left(x^2 + p_2x + q_2\right) \le 0$$

при $p_1 \ne p_2$ имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда хотя бы один из дискриминантов квадратных трехчленов $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ неотрицателен.

б) Докажите то же самое и для неравенства

$$\frac{\left(x^2 + p_1x + q_1\right)\left(x^2 + p_2x + q_2\right)}{\left(x^2 + p_3x + q_3\right)^2} \le 0,$$

где $p_1 \ne p_2$, $p_2 \ne p_3$, $p_3 \ne p_1$.

Указание. Для квадратных трехчленов $ax^2 + b_1x + c_1$ и $ax^2 + b_2x + c_2$ условие $b_1 \ne b_2$ равносильно тому, что графики соответствующих квадратичных функций имеют единственную общую точку.

В нашей задаче $p_1 = -6$, $p_2 = -2$ и $p_3 = 0$. Поэтому неотрицательность хотя бы одного из дискриминантов квадратных трехчленов в числителе дроби неравенства (9) является не только необходимым, но, в силу упражнения 5, и достаточным условием существования решений этого неравенства.

Имеем

$$\left[\begin{array}{l} D_1 \ge 0 \\ D_2 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \ge 3,$$

откуда следует, что все оставшиеся значения параметра, т.е. $a < 3$, являются искомыми.

Упражнение 6. Решите вторым способом упражнения 3 и 4.

Пример решения задач третьим способом

В заключение рассмотрим задачу, которая с момента ее появления во всех источниках опубликована с неверным ответом.

Задача 3 (МГУ, геологический ф-т, 1988). *Найдите все значения параметра a, при которых множество значений функции* $y = \dfrac{\sin x + 2(1 - a)}{a - \cos^2 x}$ *содержит отрезок* $[1; 2]$.

Решение. Пусть $s = \sin x$, $p = a - 1$. Тогда задачу можно сформулировать следующим образом.

Найдите все значения параметра p, при которых множество значений функции

$$y = \frac{s - 2p}{s^2 + p}, \quad (10)$$

где $s \in [-1; 1]$, *содержит отрезок* $[1; 2]$.

Из равенства (10) получим

$$\left(s^2 + p\right)y = s - 2p. \quad (11)$$

Это равенство при $s^2 + p \ne 0$ равносильно равенству (10), а при $s^2 + p = 0$ и $s - 2p = 0$ оно истинно при всех (следовательно, возможно и при «лишних») значениях переменной y. Поэтому те значения параметра p, при которых одновременно $s^2 + p = 0$ и $s - 2p = 0$, требуют отдельного анализа на принадлежность к ответу.

Указанные значения находим из системы

$$\begin{cases} s^2 + p = 0, \\ s - 2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0, \\ s = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p = -\frac{1}{4}, \\ s = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Так как $-1 \le s \le 1$, то оба значения $p = 0$ и $p = -\frac{1}{4}$ могут спровоцировать появление «лишних» значений переменной y.

Случай $p = 0$. Очевидно, что функция $y(s) = \frac{1}{s}$ на отрезке $[-1; 1]$ принимает все значения из промежутка $[1; 2]$ (т.е. $E(y) \supset [1; 2]$), и, следовательно, значение $p = 0$ является одним из искомых.

Случай $p = -\frac{1}{4}$. Тогда $y = \dfrac{s + \frac{1}{2}}{s^2 - \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{s - \frac{1}{2}}$, где $s \ne \pm\frac{1}{2}$.

Множество значений функции $y(s)$ на отрезке $[-1; 1]$ не содержит промежуток $[1; 2]$. Поэтому значение $p = -\frac{1}{4}$ не является искомым.

Преобразуем теперь равенство (11) к виду

$$(y + 2) \cdot p = s - ys^2.$$

Так как нас интересуют только значения y из промежутка $[1; 2]$, то последнее равенство равносильно следующему ($y + 2 \ne 0$):

$$p = \frac{s - ys^2}{y + 2}. \quad (12)$$

(Продолжение см. на с. 34)

ПРОГРЕССИИ

○ Заблуждается тот, кто полагает, что в Древнем Египте существовала сугубо «практическая» математика, обслуживавшая исключительно бытовые расчеты. Если бы это действительно было так, то из-под пера древнеегипетского писца Ахмеса в начале второго тысячелетия до нашей эры не появилась бы задача, привлекшая потомков отвлеченной игрой ума:

«У 7 лиц есть 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти 7 мер зерна. Каков ряд чисел, возникающих из этой задачи, как велика сумма его членов?»

Впоследствии эта задача перекочевала в фольклор многих народов. Например, в российском варианте она звучала так:

«Шли семь старцев, у каждого старца по семи костылей, на всяком костыле по семи сучков, на каждом сучке по семи кошелей, в каждом кошеле по семи пирогов, а в каждом пироге по семи воробьев. Сколько всего?»

По существу, в этой задаче речь идет о нахождении суммы членов конечной геометрической прогрессии со знаменателем 7.

Арифметическая и геометрическая прогрессии были объектом внимания не только в Древнем Египте, но и в других очагах древней культуры. Например, в одной из древневавилонских клинописных табличек содержится задача о дележе наследства между десятью братьями в соответствии с арифметической прогрессией:

«Есть 10 братьев и $1\frac{2}{3}$ мины серебра. Брат выше брата (в отношении его доли). На сколько он выше, я не знаю. Доля восьмого 6 шекелей. Брат над братом, на сколько он выше?»

(Для желающих попробовать свои силы в решении этой задачи сообщим, что 1 мина – единица веса, равная 60 шекелям.)

Дж.Кардано (1501–1576)

○ Средневековый алгебраист Джироламо Кардано наряду с арифметической и геометрической прогрессиями, которые он называл «равновозрастающими», рассматривал также «конформно возрастающие» прогрессии. Так он называл последовательности, у которых для арифметической прогрессии разность, а для геометрической – знаменатель имеют два чередующихся значения.

Арифметическая прогрессия a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, … обобщалась им на прогрессию a, $a + d$, $a + r$, $a + 2d + r$, $a + 2d + 2r$, $a + 3d + 2r$, $a + 3d + 3r$, …, а геометрическая прогрессия a, aq, aq^2, aq^3, … – на прогрессию a, aq, aqp, aq^2p, aq^2p^2, aq^3p^2, aq^3p^3, … Кроме этих последовательностей, Кардано рассматривал «равномерно-возрастающие» прогрессии. В этих прогрессиях разности или знаменатели возрастают как арифметическая прогрессия, вследствие чего арифметическая прогрессия обобщается на прогрессию a, $a + d$, $a + d + 2d$, $a + d + 2d + 3d$, … а геометрическая прогрессия – на прогрессию a, aq, $aq(q+1)$, $aq(q+1)(q+2)$, … В качестве полезного упражнения рекомендуем найти выражение общего члена в последовательностях Кардано.

○ В следующей практической задаче возникает еще один любопытный вид обобщения – арифметико-геометрическая прогрессия. Эту прогрессию можно описать рекуррентной зависимостью

$$x_{n+1} = ax_n + b,$$

где a и b – ненулевые константы, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Предположим, в некоторой технологической цепочке производства товаров $(n+1)$-й производитель покупает промежуточный товар у n-го производителя, обрабатывает (или дорабатывает) его и, естественно, свой продукт продает дороже следующему участнику процесса. При этом отпускная цена товара x_n у n-го производителя умножается на коэффициент $a > 1$, учитывающий налог с продаж. Стоимость отпускного товара x_{n+1} у $(n + 1)$-го производителя увеличивается по сравнению с понесенными им затратами на величину b. Для простоты полагая величину b постоянной для всех производителей, приходим к рекуррентной схеме роста цены товара по мере продвижения его по технологической цепочке. Выражение общего члена этой последовательности имеет вид $x_n = a^n x_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1}$. Таким образом, окончательная стоимость товара довольно сильно – полиномиально – зависит от величины налога с продаж (коэффициента a). Кроме того, она существенно зависит от цены x_0, которую назначает первый производитель технологической цепочки. Отсюда понятно, почему незначительное увеличение цены на базовый товар (например, топливо) приводит к резкому скачку цен на все другие продукты производства.

○ Среди первых членов арифметической прогрессии 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, … встречается сравнительно много простых чисел. Будут ли простые числа в этой прогрессии образовывать бесконечное множество или же, начиная с некоторого места, от них не останется и следа? Оказывается, не только в этой, но и в любой другой арифметической прогрессии, у которой первый член и ее

Л.Дирихле (1805–1859)

разность взаимно просты, простые числа будут встречаться в неограниченном количестве. Это впервые доказал Петер Густав Лежён Дирихле в 1837 году, привлекая аппарат высшей математики. В 1949 году А. Сельберг опубликовал элементарное (но не простое!) доказательство теоремы Дирихле.

В некоторых частных случаях элементарное доказательство найти сравнительно несложно. Например, докажем, что в арифметической прогрессии с первым членом 3 и разностью 4 встречается бесконечно много простых чисел, или, другими словами, простых чисел вида $4t + 3$ бесконечно много. Предположим, что существует только конечное множество простых чисел вида $4t + 3$, и рассмотрим число N, равное их произведению. Поскольку число $4N + 3$ нечетное, то все его простые делители имеют вид $4n + 3$ или $4n + 1$. Число $4N + 3$ не может иметь в качестве делителей только числа вида $4n + 1$, ведь произведение чисел вида $4n + 1$ само имеет такой же вид. Пусть D – некоторый простой делитель числа $4N + 3$, имеющий вид $4n + 3$. Поскольку число $4N + 3$ не делится ни на одно из простых чисел вида $4t + 3$ (мы предположили, что таких простых чисел конечное количество, а их произведение равно числу N), то обнаруженный нами новый простой делитель D должен быть больше, чем все простые числа вида $4t + 3$, рассмотренные ранее. Противоречие, поскольку никаких новых простых делителей, по нашему предположению, быть не может.

○ Предположим, множество всех натуральных чисел каким угодно образом разбито на части (например, на числа четные и нечетные, простые и составные и т.п.). Можно ли утверждать, что по крайней мере в одной из этих частей найдутся арифметические прогрессии со сколь угодно большим количеством членов? Несмотря на простоту вопроса и очевидность ответа, задача эта оказалась не такой уж простой. Известный ученый и педагог Александр Яковлевич Хинчин (1894–1959) назвал ее одной из «жемчужин теории чисел». В конце двадцатых годов прошлого столетия ее решил голландский математик Ван дер Варден, доказав следующую теорему. Пусть k и l – произвольные натуральные числа. Тогда существует такое натуральное число n (зависящее от k и l), что при разбиении любого отрезка натуральных чисел длины n любым способом на k классов (среди которых могут быть и пустые) по крайней мере в одном из этих классов найдется арифметическая прогрессия длины l.

Знаете ли вы, что...

• Существуют арифметические прогрессии произвольной длины, составленные из различных попарно взаимно простых чисел.

• В каждой возрастающей арифметической последовательности, членами которой являются натуральные числа, существует отрезок произвольной длины, состоящий только из составных чисел.

• Существует арифметическая прогрессия из натуральных чисел, содержащая бесконечно много членов, являющихся точными квадратами.

• Не существует четырех последовательных натуральных чисел, каждое из которых было бы степенью натурального числа с натуральным показателем, большим 1.

• Не существует четырех различных квадратов натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию (П.Ферма).

П.Ферма (1601–1665)

• Существует бесконечно много троек натуральных чисел x, y и z, для которых числа $x(x+1)$, $y(y+1)$, $z(z+1)$ составляют возрастающую арифметическую прогрессию.

• Если стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами a, b, c, образующими арифметическую прогрессию, то $a : b : c = 3 : 4 : 5$.

• Не существует возрастающих арифметических прогрессий, состоящих из четырех членов последовательности Фибоначчи (определяемой условиями $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ для $n = 1, 2, \ldots$), однако существуют возрастающие арифметические прогрессии, состоящие из трех членов последовательности Фибоначчи.

• Прогрессия $11k + 4$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) не содержит ни одного числа последовательности Фибоначчи.

• Существует бесконечно много арифметических прогрессий, образованных из трех разных простых чисел.

• Известно много прогрессий, образованных из трех различных простых чисел, первыми членами которых является число 3, например: 3, 7, 11; 3, 11, 19; 3, 17, 31; 3, 23, 43; 3, 31, 59; 3, 37, 71; 3, 41, 79; 3, 43, 83, однако неизвестно, существует ли их бесконечно много.

• Существует только одна арифметическая прогрессия с разностью 10, составленная из трех простых чисел, а именно прогрессия 3, 13, 23.

• Неизвестно, существует ли бесконечно много арифметических прогрессий, образованных из трех простых чисел, первым членом которых является любое простое нечетное число.

• Если n членов арифметической прогрессии являются простыми нечетными числами, то разность прогрессии делится на каждое простое число, меньшее n (В.Тебольт). Последовательность 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089 является арифметической прогрессией, состоящей из десяти возможно наименьших простых чисел.

• Существует аналогичная прогрессия из 13 простых чисел: 4943, 65003, 125063, 185123, 245183, 305243, 365303, 425363, 485423, 545483, 605543, 665603, 725663.

• Неизвестно, существует ли арифметическая прогрессия, состоящая из n простых чисел, где n – произвольное число.

• Ни один член прогрессии $30k + 7$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) не является ни суммой, ни разностью двух простых чисел.

Материал подготовил А.Жуков

(Начало см. на с. 28)

При фиксированных значениях y_0 и s_0 равенство (12) объявляет значение параметра p, для которого существует s_0 такое, что функция $y=\frac{s-2p}{s^2+p}$ принимает значение y_0. Поэтому при фиксированном значении y_0 и изменении s от -1 до 1 мы получим **все** значения параметра p, при которых данное значение y_0 достигается хотя бы при одном значении s из промежутка $-1\le s\le 1$.

При фиксированном значении переменной y равенство (12) объявляет квадратичную зависимость p от s. Так как при $1\le y\le 2$ абсцисса вершины соответствующей параболы равна $\frac{y}{2}$ и всегда принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{2};1\right]\subset[-1;1]$, то множество указанных значений параметра p есть отрезок $\left[p(-1);\,p\left(\frac{y}{2}\right)\right]$, т.е. отрезок

$$-\frac{y+1}{y+2}\le p\le\frac{1}{4y(y+2)}. \qquad (13)$$

Поскольку мы ищем значения параметра p, при которых достигается **любое** значение y из отрезка $[1;2]$, то искомые значения есть не что иное как общие точки **всех** отрезков вида (13), когда y пробегает значения от 1 до 2.

Иными словами, для всех $y\in[1;2]$ должно выполняться двойное неравенство (13), что равносильно условию

$$\max_{1\le y\le 2}\left(-\frac{y+1}{y+2}\right)\le p\le\min_{1\le y\le 2}\frac{1}{4y(y+2)}.$$

Так как $-\frac{y+1}{y+2}=-1+\frac{1}{y+2}$, то $\max\limits_{1\le y\le 2}\left(-\frac{y+1}{y+2}\right)=-\frac{2}{3}$. Минимальное значение дроби $\frac{1}{4y(y+2)}$ на отрезке $[1;2]$ достигается при $y=2$ и равно $\frac{1}{32}$. Поэтому последнее двойное неравенство принимает вид

$$-\frac{2}{3}\le p\le\frac{1}{32}.$$

Учитывая ранее рассмотренные случаи $p=0$ и $p=-\frac{1}{4}$, получаем

$$\begin{cases}-\frac{2}{3}\le p\le\frac{1}{32},\\ p\ne-\frac{1}{4}.\end{cases}$$

Возвращаясь к переменной a, находим *ответ задачи*:

$$a\in\left[\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4};\frac{33}{32}\right].$$

Упражнение 7. Решите третьим способом задачу 2.

По следам наших публикаций

«Для остроугольных треугольников справедливо неравенство $f(7)\le f(1)$, однако полученное авторами задачи доказательство этого факта неэлементарно по средствам и довольно сложно. Авторы заранее признательны читателям за нахождение и присылку элементарного доказательства», так мы писали, завершая решение задачи М1899.

Математик из Болгарии Александр Иванов прислал в редакцию элементарное доказательство неравенства. Приведем его.

Обозначим: α,β,γ – углы остроугольного треугольника, $f(t)=\sin t\alpha+\sin t\beta+\sin t\gamma$.

Теорема. $f(1)\ge f(7)$.

Лемма 1. $f(1)>2$.

Доказательство. Пусть $\alpha\ge\beta\ge\gamma$. Поскольку

$$\frac{\pi}{2}>\frac{\alpha}{2}>\frac{\beta-\gamma}{2}\ge 0,$$

то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=$$

$$=\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}>\sin\alpha+2\cos^2\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha+\cos\alpha+1>2.$$

(Последнее неравенство очевидно: $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ – катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой длины 1.)

Лемма 1 допускает прозрачную геометрическую интерпретацию и красивое геометрическое доказательство.

Лемма 2. *Если* $\sin t\alpha\le 0$, *то* $f(1)>f(t)$.

Лемма 3. *Если* $a\le c$ *и* $b\ge d$, *то* $ab+cd\le\frac{(a+c)(b+d)}{2}$.

Доказательство теоремы. Пусть $\alpha\ge\beta\ge\gamma$. Из леммы 2 следует, что $7\alpha<3\pi$, откуда $\beta\le\alpha<\frac{3\pi}{7}$. Значит, $\gamma>\frac{\pi}{7}$, откуда $7\gamma>2\pi$, $\gamma>\frac{2\pi}{7}>\frac{\pi}{4}$. Поэтому всюду ниже мы будем считать $\frac{\pi}{4}<\gamma<\frac{\pi}{3}$.

Перепишем неравенство $f(7)\le f(1)$ в виде

$$\sin 3\alpha\cos 4\alpha+\sin 3\beta\cos 4\beta\le-\sin 3\gamma\cos 4\gamma.$$

Так как $\pi\le 3\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $0<3\beta\le 3\alpha$, то $\sin 3\alpha\le\sin 3\beta$. Поскольку $\pi<4\beta\le 4\alpha<2\pi$, то $\cos 4\alpha\ge\cos 4\beta$. Отсюда по лемме 3

$$\sin 3\alpha\cos 4\alpha+\sin 3\beta\cos 4\beta\le\frac{(\sin 3\alpha+\sin 3\beta)(\cos 4\alpha+\cos 4\beta)}{2},$$

поэтому достаточно доказать

$$(\sin 3\alpha+\sin 3\beta)(\cos 4\alpha+\cos 4\beta)\le-2\sin 3\gamma\cos 4\gamma,$$

или

$$2\sin\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2}\cdot 2\cos 2(\alpha+\beta)\cos 2(\alpha-\beta)\le$$

$$\le-4\sin\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\gamma}{2}\cos 4\gamma,$$

или

$$\cos 2\gamma\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2}\cos 2(\alpha-\beta)\ge\sin\frac{3\gamma}{2}\cos 4\gamma.$$

Так как $\cos 2\gamma<0$ и $\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2}\cos 2(\alpha-\beta)\le 1$, то $\cos 2\gamma\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2}\cos 2(\alpha-\beta)\ge\cos 2\gamma$, и достаточно доказать

$$2\cos 2\gamma\ge\sin\frac{11\gamma}{2}-\sin\frac{5\gamma}{2}.$$

Имеем $\frac{7\pi}{6}<\frac{11\pi}{8}<\frac{11\gamma}{2}<\frac{11\pi}{6}$, откуда $\sin\frac{11\gamma}{2}<-\frac{1}{2}$. Далее, $\frac{\pi}{2}<\frac{5\gamma}{2}<\frac{5\pi}{6}$, откуда $\sin\frac{5\gamma}{2}>\frac{1}{2}$, и $\sin\frac{11\gamma}{2}-\sin\frac{5\gamma}{2}<-1$. С другой стороны, так как $\frac{\pi}{2}<2\gamma<\frac{2\pi}{3}$, то $2\cos 2\gamma>-1$.

Неравенство доказано.

Материалы вступительных экзаменов 2005 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Решите неравенство
$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} < 4+\sqrt{3}-x .$$

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2\log_3^2(x+2y) = \\ = \log_{1/3}(x+2y)\log_{1/3}(x-y)+\log_3^2(x-y), \\ x^2+xy-2y^2=9. \end{cases}$$

3. Решите неравенство
$$\frac{\log_7 12}{\log_7\left(x^2-9\right)} \ge \frac{\log_5\left(x^2+8x+12\right)}{\log_5\left(x^2-9\right)} .$$

4. Высоты равнобедренного остроугольного треугольника ABC, в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $AO = 5$, а высота AD равна 8.

5. Числа $-\sin x$, $4\sin x \operatorname{ctg} 2x$, $\cos x$ являются членами арифметической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найдите все значения x и k, при которых седьмой член этой прогрессии равен $\frac{1}{5}$.

6. Для того чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее чем на 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то они двигаются со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Юра может перейти мост за 2 минуты, Катя – за 4 минуты, Игорек – за 10 минут, а Мария Ивановна – за 16 минут? Фонарик у семьи только один.

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Найдите уравнение параболы по трем ее точкам: $A(1;4)$, $B(2;9)$, $C(-1;6)$.

2. Решите неравенство
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9\left(9x^2-6+\frac{1}{x^2}\right)} \ge \frac{1}{x} .$$

3. Три хозяйки приготовили одинаковые обеды, каждая для своей семьи, на общей печке. Первая положила в топку 3 полена, вторая – 5, а третья, не имевшая поленьев, предложила им 80 рублей. Объясните, как по справедливости хозяйки должны разделить эти деньги, если дрова прогорели полностью.

4. Решите уравнение
$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1 .$$

5. В треугольнике ABC $AB = 9$, $AC = 6$. Биссектриса треугольника, проведенная из вершины A, равна $\frac{18}{5}$. Найдите угол ABC.

6. Найдите все решения уравнения
$$\sqrt{\log_{4x^2-x} 5}\,\log_5\left(\frac{25}{4x^2-x}\right) = 1 ,$$
удовлетворяющие неравенству $\sin x > \operatorname{ctg} 2x$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Пассажир поезда, движущегося равномерно со скоростью $v_1 = 54$ км/ч, видит в течение промежутка времени $t_0 = 60$ с другой поезд длиной $l = 300$ м, который движется по соседнему пути в том же направлении с большей скоростью. Найдите скорость v_2 второго поезда.

2. На подвижной тележке массой M, находящейся на горизонтальной плоскости, с помощью легкого стержня, который может свободно вращаться вокруг точки O (рис.1), подвешен маленький шарик массой m. Вначале система покоилась. Шарику кратковременным ударом сообщают горизонтальную скорость v. На какую наибольшую высоту H по сравнению с первоначальным уровнем поднимется шарик? Считать, что угол отклонения стержня от вертикали не превышает 90°. Трением и массой колес тележки пренебречь.

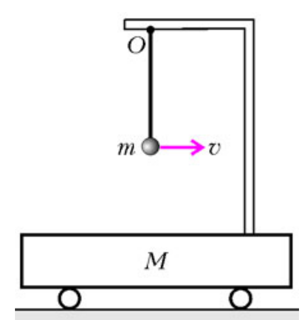


Рис. 1

3. В плоский воздушный конденсатор емкостью C, подключенный к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$, медленно вдвинули пластинку из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε, которая заполнила весь объем между обкладками. Какую работу A против сил электрического поля необходимо было совершить, чтобы вдвинуть пластинку в конденсатор, и какую работу $A_{ст}$ совершили при этом сторонние силы источника? Сопротивлением подводящих проводов и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

4. Горизонтальный цилиндрический сосуд разделен на две части тонким поршнем, который может двигаться без трения.

В левой части сосуда находится некая масса водорода, а в правой – такая же масса кислорода. Во сколько раз η объем левой части сосуда больше объема правой? Молярная масса водорода $M_в = 2$ кг/кмоль, кислорода $M_к = 32$ кг/кмоль. Температуры газов одинаковы.

5. Линейные размеры изображения, полученного в рассеивающей линзе, в два раза меньше линейных размеров самого предмета. Расстояние между предметом и его изображением равно $L = 3$ см. Чему равен модуль $|F|$ фокусного расстояния линзы?

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Груз поднимается с помощью лебедки с постоянной скоростью $v = 0,9$ м/с (рис.2). С какой угловой скоростью ω вращается барабан лебедки, если его диаметр $D = 18$ см?

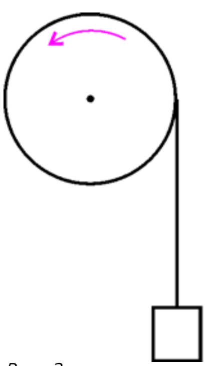


Рис. 2

2. Два гладких шара одинаковых размеров движутся навстречу друг другу по гладкой горизонтальной плоскости. Скорость одного шара, масса которого в k раз больше массы другого, равна v_1. В результате упругого центрального соударения шар с большей массой остановился ($v_1' = 0$). Найдите скорость v_2' шара меньшей массы после соударения.

3. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ подключили к источнику напряжения, в результате чего конденсатор приобрел заряд $q = 10$ мкКл. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 5$ мм. Определите напряженность поля E внутри конденсатора.

4. Один моль гелия ($\nu = 1$ моль) совершает работу A в цикле *1–2–3–1*, состоящем из процессов адиабатического расширения *1–2*, изотермического сжатия *2–3* и изобарического расширения *3–1* (рис.3). Разность наибольшей и наименьшей температур газа в цикле равна ΔT. Найдите работу A_{23}, совершенную газом в изотермическом процессе *2–3*.

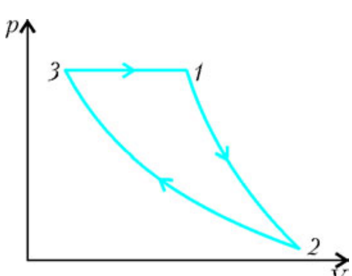


Рис. 3

5. Изображение предмета, помещенного на расстоянии $d = 15$ см от линзы, получается на экране, расположенном на расстоянии $f = 30$ см от нее. Найдите фокусное расстояние линзы F.

Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкур

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\log_{0,01} 100\sqrt[3]{3} + \log_{1000} 10\sqrt{3}.$$

2. Решите уравнение

$$\sin\frac{\pi}{8}\cos x - \cos\frac{\pi}{8}\sin x = \cos\frac{\pi}{4}.$$

3. Из 28 м ткани можно сшить 8 мужских и 4 детских пальто. Сколько метров ткани необходимо для пошива одного мужского пальто, если из 15 м той же ткани можно сшить 2 мужских и 5 детских пальто?

4. Решите неравенство

$$\log_{27}(8 - 3x) \le \frac{1}{3}.$$

5. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{1}{5} - \left|\frac{x}{3} - 1\right|}.$$

6. Найдите знаменатель геометрической прогрессии с положительными членами, если разность третьего и второго членов прогрессии составляет 231% от ее первого члена.

7. При каких значениях b число 1 является корнем уравнения

$$\sqrt{7x - 2b} = b - 2x\ ?$$

8. В треугольнике ABC $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle B = 90°$. На сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что $AM = CN = 1$. Найдите площадь четырехугольника $BMNC$.

9. В шар объема $4\pi\sqrt{3}$ вписан конус, площадь боковой поверхности которого в два раза больше площади основания. Найдите радиус основания конуса.

10. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости, координаты точек которой удовлетворяют неравенству

$$\big|3 - |x|\big| + \big|5 - |y|\big| \le 6.$$

11. Решите уравнение

$$3^{2x^2-1} - 3^{(x-1)(x+5)} - 2 \cdot 3^{8(x-1)} = 0.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x + \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0,5.$$

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{1 - \sqrt{2x - 1}}.$$

3. Вычислите

$$\frac{\log_3 18}{\log_{18} 3} - \log_3 2 \log_3 162.$$

4. Решите неравенство

$$|x - 2| + |x| \le 1 + x.$$

5. Решите уравнение

$$4^{x-28} + 4^{2x-60} = 80.$$

6. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точки M и N – середины сторон AF и BC соответственно. Периметр трапеции $ABNM$ равен P. Найдите периметр шестиугольника.

7. Один клиент положил в банк некоторую сумму денег под определенный процент годовых. Другой клиент положил в тот же банк 4320 руб. под тот же процент годовых. Через год после вложения у первого клиента сумма составила 3600 руб., а еще через 2 года стала такой же, какой была у второго клиента через год после вложения. Какую сумму положил в банк первый клиент?

8. Решите систему

$$\begin{cases} 2^{3x-y} + \log_2(x+y) = 6, \\ 4^{3x-y} + \log_4(x+y) = 17. \end{cases}$$

9. Найдите наименьшее значение выражения $\left|x^2 - 12y^2\right|$, если x, y – натуральные числа.

10. Решите уравнение

$$\sin 2x - \cos 2x = 1 - \operatorname{ctg} x \cos 2x .$$

11. Решите неравенство

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} \geq 3\sqrt[4]{x^2 - 4x + 20} .$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два тела движутся вдоль оси X. На рисунке 1 приведены графики зависимости проекций скоростей этих тел на ось X от времени. а) Определите ускорения a_1 и a_2 тел. б) Какое расстояние L было между телами в момент времени $t = 0$, если минимальное расстояние между ними при таком движении составило $L_{\min} = 30$ м ?

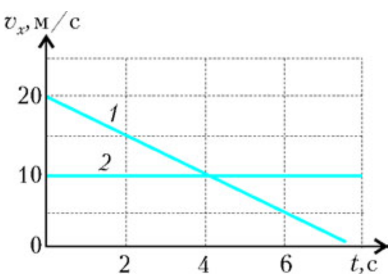


Рис. 1

2. Груз массой $m = 100$ г, подвешенный на пружине жесткостью $k = 20$ Н/м, совершает вертикальные колебания. С каким ускорением a движется шарик в момент времени, когда пружина растянута на $x = 2$ см?

3. Тело массой $m = 0{,}5$ кг брошено вертикально вверх. Когда тело поднялось на некоторую высоту, его потенциальная энергия увеличилась на $\Delta E_{\text{п}} = 25$ Дж , а кинетическая энергия уменьшилась в $k = 2$ раза по сравнению с начальной. На какую максимальную высоту H над точкой старта поднимется тело? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 .

4. Изотерма кислорода при температуре $t_1 = 47$ °C совпадает с изотермой азота при температуре $t_2 = 7$ °C . Во сколько раз отличаются массы этих газов? Молярная масса кислорода $\text{M}_1 = 32$ г/моль , молярная масса азота $\text{M}_2 = 28$ г/моль .

5. В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем, расположенным на высоте $h = 1$ м от дна сосуда, находится идеальный одноатомный газ. Газ медленно нагревают, одновременно насыпая на поршень песок так, чтобы поршень оставался неподвижным. Какое количество теплоты Q получил газ к моменту, когда на поршень высыпали песок массой $m = 1$ кг? Трением между поршнем и сосудом пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 .

6. Точечный положительный заряд q_1 расположен в вершине A равнобедренного треугольника ABC, в котором $AC = BC = a$, $\angle ACB = \alpha = 30°$. а) Определите модуль E_1 вектора напряженности электрического поля, созданного зарядом q_1 в вершине C. б) Какой точечный заряд q_2 нужно поместить в вершину B, чтобы модуль вектора напряженности суммарного электрического поля зарядов q_1 и q_2 в вершине C был минимальным? Постоянная в законе Кулона равна k.

7. Постоянный ток $I_1 = 300$ мА для пальчиковой батарейки с ЭДС $\mathscr{E} = 1{,}6$ В является предельным (при бо́льших токах батарейка начинает нагреваться и работает нестабильно). Во сколько раз этот ток меньше тока короткого замыкания, если известно, что напряжение на выводах батарейки при токе I_1 равно $U_1 = 1{,}3$ В ? Чему равно внутреннее сопротивление r батарейки?

8. Замкнутый проволочный виток сопротивлением $R = 0{,}3$ Ом проносят мимо магнита. При этом магнитный поток Φ через поверхность, ограниченную витком, меняется так, как показано на рисунке 2. а) Определите силу тока в витке в момент времени $t = 4$ с. б) В какой момент времени величина тока в контуре максимальна?

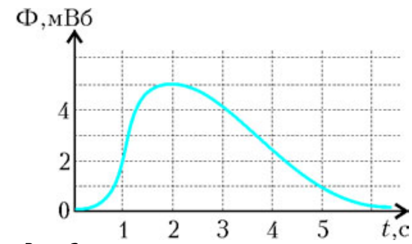


Рис. 2

9. Стеклянная призма с преломляющим углом $\varphi = 30°$ лежит на плоском зеркале (рис.3). При каком угле падения α луча на верхнюю грань призмы луч после отражения от зеркала сменит направление распространения на прямо противоположное? Показатель преломления стекла считать равным $n = 1{,}7$.

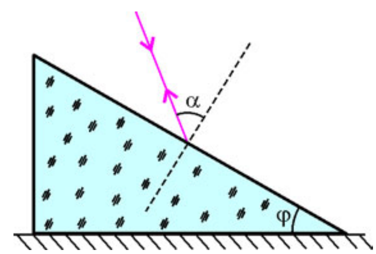


Рис. 3

10. Во сколько раз энергия фотона, соответствующего γ-излучению с частотой $\nu = 3 \cdot 10^{20}$ Гц , больше энергии фотона рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-10}$ м ? Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с .

Вариант 2

(олимпиада-2005)

1. Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением, отличным от нуля. За первую секунду движения тело прошло такой же путь $s = 5$ м, что и за вторую секунду. Определите начальную скорость тела.

2. Две шайбы массами m и $2m$, соединенные легкой пружиной, движутся вдоль одной прямой по горизонтальной поверхности (рис.4). В некоторый момент времени скорости шайб направлены одинаково, причем легкая шайба движется замедленно с ускорением $a_1 = 3$ м/с^2 . Определите в этот момент времени величину a_2 и направление вектора ускорения тяжелой шайбы. Растянута или сжата пружина в этот момент? Коэффициент трения между каждой шайбой и поверхностью $\mu = 0{,}2$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 .

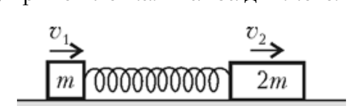


Рис. 4

3. Однородный стержень массой $m = 50$ г свободно вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через его конец. При вращении кинетическая энергия стержня меняется от минимального значения $E_{\min} = 0{,}1$ Дж до максимального $E_{\max} = 0{,}3$ Дж . Определите длину стержня l. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 .

4. В сосудах объемами $V_1 = 10$ л и $V_2 = 20$ л находится воздух при одной и той же температуре. Относительная влажность воздуха в первом сосуде $\varphi_1 = 70\%$. После того как сосуды перенесли в другое помещение и соединили тонкой трубкой, относительная влажность воздуха в обоих сосудах стала $\varphi = 20\%$. Изменилась ли (если изменилась, то в какую сторону) температура воздуха в сосудах? Ответ обоснуйте.

5. В стальном герметичном сосуде кубической формы с ребром a = 1 м и толщиной стенок d = 1 мм находится одноатомный идеальный газ при температуре T = 300 К и давлении $p = 10^5$ Па. Во сколько раз теплоемкость сосуда больше теплоемкости находящегося в нем газа? Плотность стали $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, ее удельная теплоемкость $c = 0{,}46 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

6. В схеме, изображенной на рисунке 5, емкость C = 1 мкФ, напряжение источника U = 100 В. а) Определите заряд каждого конденсатора до замыкания ключа K. б) Какой заряд q пройдет через источник после того, как ключ K будет замкнут?

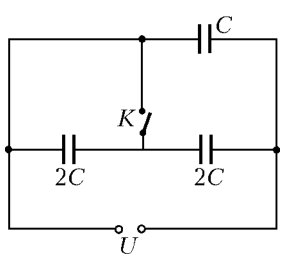


Рис. 5

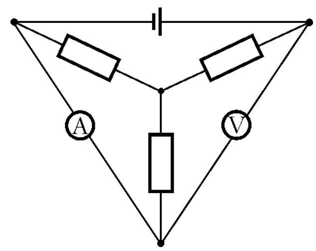


Рис. 6

7. Три одинаковых резистора, источник ЭДС, идеальный амперметр и идеальный вольтметр соединены, как показано на рисунке 6. Амперметр показывает ток I = 1 А, вольтметр показывает напряжение U = 30 В. Определите сопротивление R каждого резистора.

8. Электропечь сопротивлением R = 20 Ом подключена к источнику переменного тока. Определите количество теплоты Q, выделяемое печью за время t = 1 ч, если амплитуда силы тока равна $I_0 = 10$ А.

9. На каком расстоянии d друг от друга нужно расположить два стеклянных аквариума с водой, чтобы луч света, падающий из воды на стенку одного из аквариумов, проник в другой аквариум без смещения (рис.7)? Показатель преломления стекла $n_1 = 1{,}6$, показатель преломления воды $n_2 = 4/3$. Стенки аквариумов параллельны, толщина каждой стенки h = 1 см. Угол падения луча считать малым.

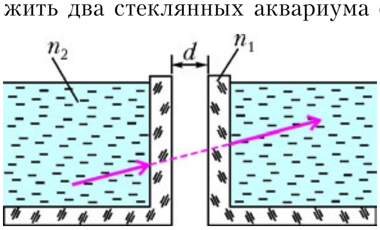


Рис. 7

Публикацию подготовили А.Берестов, И.Горбатый, И.Кожухов, С.Куклин, Т.Олейник, Т.Соколова

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

2. Решите уравнение
$$2\cos^2 x = 3\sin x .$$
Найдите его корни, лежащие в промежутке $[-3\pi/2; \pi/2]$.

3. Решите уравнение
$$3 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 82 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 27 = 0 .$$

4. Решите неравенство
$$\log_2 \frac{x^2 - 4x}{x - 6} \le 4 .$$

5. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2\sqrt{3}/24$, проходящими через точку $M\left(4; -2\sqrt{3}\right)$.

6. Определите все значения a, при которых уравнение
$$(x + a)^2 - 2a - 2 = |x| - |x - 2|$$
имеет хотя бы один корень, и решите его при каждом a.

7. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, которая проходит через середину бокового ребра TA, пересекает сторону основания AB в точке M так, что $BM = 2AM$, и параллельна медиане основания AD, если сторона основания пирамиды равна 3, а расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $1/4$.

Вариант 2

1. Когда из котлована выкачали $3/8$ находившейся в нем воды, насос заменили на более мощный, и вся работа двух насосов по осушению котлована заняла 15 ч. Если бы оба насоса работали одновременно, котлован осушили бы за 5 ч. За какое время можно выкачать воду из котлована каждым из насосов в отдельности?

2. Решите уравнение
$$\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2}\sin x .$$

3. Решите уравнение
$$\log_4 (10x - 54) = 1 + \log_2 (x - 12) .$$

4. Решите неравенство
$$\frac{x - 6\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 1} > x - 25 .$$

5. На графике функции $y = 0{,}25x^2 - x + 8$ укажите такую точку A, чтобы площадь треугольника с вершинами A, $O(0; 0)$ и $B(5; 5)$ была наименьшей. Найдите эту площадь.

6. Определите все значения p, при которых уравнение
$$(x + p)^2 = 4(p + 1) + 8\frac{|x|}{x}$$
имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений p.

7. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали BA_1 боковой грани ABB_1A_1, проходящая через вершину основания A и центр описанной около призмы сферы, если радиус сферы равен $\sqrt{5}$, а стороны основания призмы равны $\sqrt{6}$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Алюминиевое кольцо подвешено на двух нитях (рис.1). Северный полюс магнита приближается с некоторой скоростью к кольцу, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно

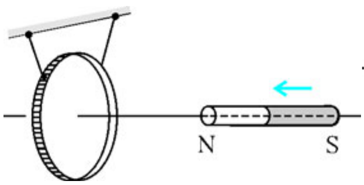


Рис. 1

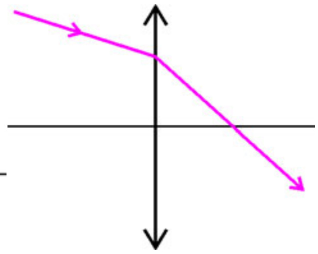


Рис. 2

плоскости кольца. Кольцо при этом будет притягиваться к магниту или отклоняться от него? Ответ поясните.

2. На рисунке 2 показан ход луча через собирающую линзу. Найдите построением положение главных фокусов линзы.

3. По струне слева направо бежит поперечная гармоническая волна со скоростью v = 40 м/с (рис.3). Длина волны λ = 60 см, амплитуда A = 2 мм. Найдите скорость v_O точки O струны в момент времени, соответствующий рисунку.

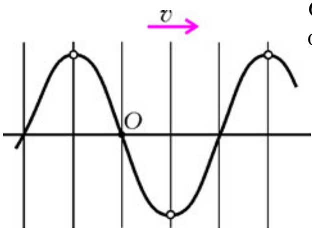


Рис. 3

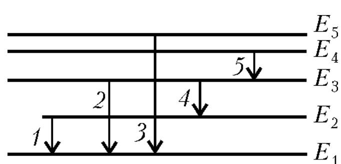


Рис. 4

4. На рисунке 4 представлена схема энергетических уровней атома. Какой цифрой обозначен переход с излучением фотона, имеющего максимальный импульс?

5. Призма *1*, имеющая массу m, была положена на призму *2*, имеющую массу $4m$ и угол с горизонтом $\alpha = 30°$ (рис.5). Верхняя призма начала скользить по нижней и в некоторый момент времени двигалась по ней с относительной скоростью $v_{1\text{отн}}$. Какую скорость относительно горизонтальной поверхности имела в этот момент нижняя призма? Силами трения пренебречь.

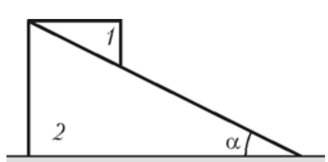


Рис. 5

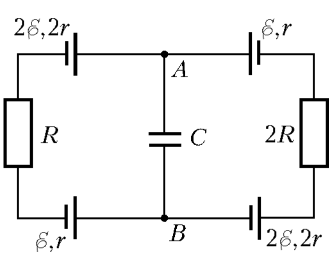


Рис. 6

6. В схеме, приведенной на рисунке 6, найдите энергию конденсатора. Параметры элементов схемы, изображенных на рисунке, считать известными.

7. Трос длиной L движется по инерции внутри горизонтальной трубы, которая изгибается в вертикальной плоскости под углом $\alpha = 30°$. Когда трос, поднимаясь по трубе, остановился, в наклонной части трубы оказалась половина его длины. Определите, сколько времени прошло от начала подъема троса до момента, когда в наклонной части трубы оказалась четвертая часть его длины. Силами трения пренебречь.

Вариант 2

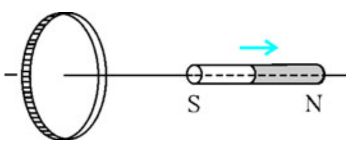


Рис. 7

1. Южный полюс магнита удаляется с некоторой скоростью от металлического кольца, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно плоскости кольца (рис.7). Укажите направление индукционного тока в кольце. Ответ поясните.

2. Как изменится период колебаний в колебательном контуре (рис.8), состоящем из воздушного конденсатора и катушки индуктивности, если пространство между обкладками конденсатора заполнить диэлектриком? Ответ поясните.

Рис. 8

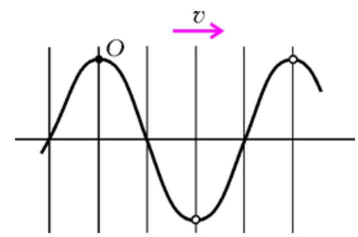


Рис. 9

3. По струне слева направо бежит поперечная гармоническая волна со скоростью v = 40 м/с. Длина волны λ = 60 см, амплитуда A = 2 мм. Найдите ускорение a точки O струны в момент времени, соответствующий рисунку 9.

4. Какой максимальный заряд q может накопиться на удаленном от других тел медном шарике радиусом r = 3 см при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны λ = 0,14 мкм? Работа выхода для меди A = 4,47 эВ.

5. В сферическую полость поместили гантель – два шарика массой m каждый, соединенные невесомым жестким стержнем, – под углом $\alpha = 45°$ к вертикали, как показано на рисунке 10. Определите силу давления нижнего шарика на стенку полости сразу же после того, как гантель отпустили. Радиус шариков гантели много меньше радиуса сферы. Силами трения пренебречь.

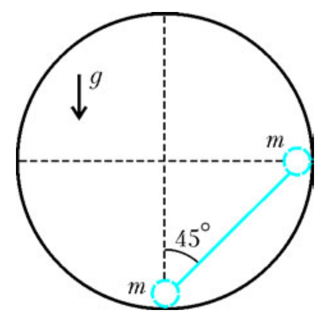


Рис. 10

6. На V–T-диаграмме изображен цикл *1–2–3–4–1*, совершаемый двумя молями азота и состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.11). Известно, что точки *2* и *4* лежат

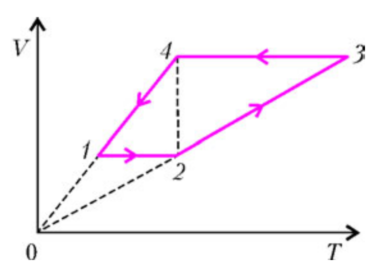


Рис. 11

на одной изотерме, а средние квадратичные скорости молекул азота составляют в точке *1* v_1 = 300 м/с, а в точке *3* – v_3 = 700 м/с. Определите работу, совершаемую газом за цикл. Молярная масса азота M = 0,028 кг/моль.

7. Небольшой шарик, имеющий массу $3m$ и заряд q, находится на высоте h над землей. На одной вертикали с ним на высоте $3h$ находится второй шарик массой $2m$ и зарядом q. Шарики одновременно бросили в одну сторону в горизонтальном направлении с одинаковыми скоростями v. Нижний шарик коснулся земли на расстоянии L от вертикали бросания. На какой высоте в этот момент находился второй шарик? Сопротивлением воздуха и влиянием индуцированных на земле зарядов пренебречь.

Публикацию подготовили Л.Паршев, Ю.Струков

Московский инженерно-физический институт

(олимпиада Федерального агентства по атомной энергии РФ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-2}} \geq (x-1)(x-2).$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x+2|+\sqrt{4y-y^2}=4, \\ (x+2)^2+4y-y^2=10. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sin 3 \leq (\sin 3)^{12x-x^2}.$$

4. При всех действительных значениях параметра a решите уравнение

$$\arccos x - \arcsin 4x = \arcsin a.$$

5. Точки K и L лежат соответственно на смежных ребрах B_1C_1 и C_1D_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$), а точки M и N лежат соответственно на смежных ребрах AD и AB нижнего основания $ABCD$, при этом $AB=AD$, $CC_1=7$. Отрезки KL и MN параллельны диагонали основания $BD = 12$. Расстояние от MN до точки A равно 1, а расстояние от KL до точки C_1 равно a. Точка $P \in CC_1$, $C_1P=2$. Найдите:

а) объем пирамиды C_1KLP в случае $a=5$;

б) площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN, в случае $a=5$;

в) максимальную площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN, в случае если $a \in [4;6]$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+3\sin 2x.$$

2. Двое рабочих, работая вместе, за четыре часа полностью выполняют задание. Известно, что за три часа первый рабочий выполняет на одну треть задания больше, чем второй рабочий выполняет за два часа. За сколько часов выполнит задание один второй рабочий?

3. Решите неравенство

$$\log_5\left(\sqrt{7}-2\right)^{x^2+3x+2} \leq \log_{25}\left(\sqrt{7}-2\right)^{x^2+6x+5}.$$

4. При всех действительных значениях параметра a решите неравенство

$$\arcsin\left((x-2)^2+(a+2)^2\right) \geq \frac{\pi}{6};$$

среди всех решений найдите x, при котором произведение $(a+2)(x-2)$ принимает наибольшее значение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=7$, $BC=6$, $AA_1=9$. На ребрах CC_1 и BB_1 взяты точки E и F соответственно так, что $C_1E=3$, а $BF=2$. Найдите: а) площадь треугольника A_1EF; б) сумму расстояний от точки G, взятой на отрезке A_1D, до прямых AA_1 и EF при условии, что она минимальна.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Ускорение свободного падения на поверхности некоторой планеты равно g. Найти ускорение свободного падения на поверхности другой планеты, масса которой в k раз больше, а радиус в n раз меньше, чем у первой.

2. На краю горизонтального диска находится тело массой m, привязанное нитью длиной l к оси диска (рис.1). Нить составляет с осью угол α. Диск вращается вокруг своей оси, при этом тело вращается вместе с ним. При какой угловой скорости тело оторвется от диска?

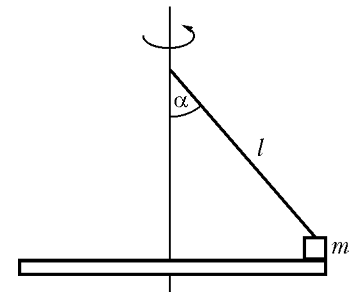


Рис. 1

3. Две открытые с обоих концов в атмосферу трубы с площадями сечений S_1 и S_2 ($S_1 > S_2$) состыкованы между собой (рис.2). В них вставлены соединенные стержнем поршни, которые при температуре T_0 отстоят на одинаковые расстояния от стыка труб. Между поршнями находится идеальный газ. При какой температуре газа правый поршень сместится влево так, что расстояние от него до стыка труб будет втрое меньше расстояния от стыка до левого поршня? Ответ обоснуйте.

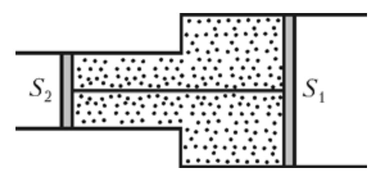


Рис. 2

4. В цилиндрический сосуд площадью сечения $S = 100$ см^2 налита жидкость плотностью $\rho = 1$ г/см^3. В сосуде плавает кубик со стороной $a = 7$ см, погрузившись на k-ю часть своего объема ($k = 2/3$). Две грани кубика параллельны поверхности жидкости. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно погрузить кубик в жидкость на n-ю часть объема ($n = 4/5$)? При погружении кубика в жидкость две его грани остаются параллельными поверхности жидкости. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

5. Однородно заряженный куб с ребром a создает в своей вершине A (рис.3) электрическое поле напряженностью E_0.

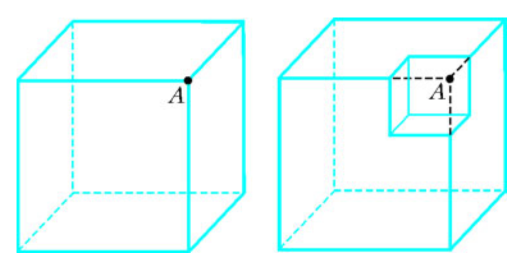


Рис. 3

Из куба удаляют кусок в форме меньшего куба с ребром a_1 ($a_1 < a$), а к заряду оставшейся части куба добавляют удвоенный заряд удаленного куска, распределяя его равномерно. Чему теперь равна напряженность электрического поля в точке A?

Вариант 2

1. На рисунке 4 изображены точечный источник света S, его изображение S' в тонкой линзе и главная оптическая ось линзы. С помощью построения найдите положение линзы и ее фокусов. Построение обоснуйте.

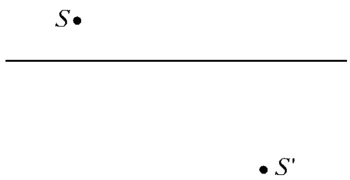


Рис. 4

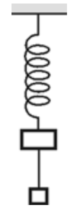


Рис. 5

2. Два тела с разными массами связанны невесомой нитью и подвешены за тело с большей массой к пружине, привязанной к потолку (рис.5). Если нить между телами перерезать, тело с большей массой будет в первый момент иметь ускорение a_1. Какое ускорение будет иметь в первый момент тело с меньшей массой, если тела подвесить к пружине за него, а затем перерезать нить?

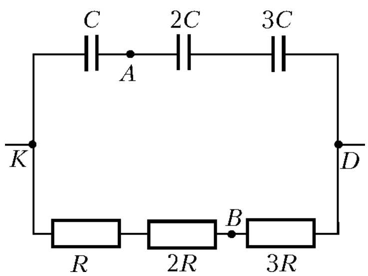


Рис. 6

3. В схеме, представленной на рисунке 6, найдите разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B. Разность потенциалов между точками K и D известна: $\varphi_K - \varphi_D = \Delta\varphi$, значения сопротивлений и емкостей приведены на рисунке.

4. Известно, что КПД двигателя, работающего по циклическому процессу *1–2–3–4–1*, график которого в координатах $p–V$ представляет собой параллелограмм (рис.7), равен η. Найдите КПД двигателя, работающего по циклическому процессу *1–3–4–1*. Рабочее тело двигателя – одноатомный идеальный газ.

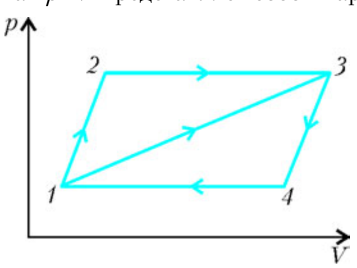


Рис. 7

5. Тело составлено из четырех склеенных полушаров (рис.8). Центры всех полушаров лежат на одной прямой, при этом центры нижнего полушара и центрального верхнего совпадают, расстояния от центров крайних верхних полушаров до центра нижнего равны. Радиус нижнего полушара $R_1 = 8$ см, его плотность $\rho_1 = 1$ г/см^3, радиус центрального верхнего полушара $R_2 = 3$ см, его плотность $\rho_2 = 15$ г/см^3, крайние верхние полушары одинаковы, их радиусы $R_3 = 4$ см, плотности $\rho_3 = 4$ г/см^3. Будет ли положение тела, изображенное на рисунке, устойчивым? Ответ обоснуйте.

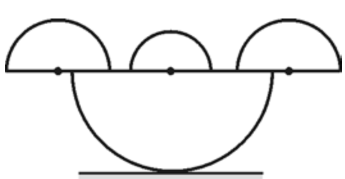


Рис. 8

Публикацию подготовили С.Муравьев, О.Нагорнов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменные экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из трех типов задач. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

1. К источнику постоянного напряжения подсоединена нагрузка, имеющая постоянное сопротивление. На подводящих проводах выделяется энергия, составляющая долю $\beta_1 = 0{,}1$ от общей энергии, получаемой от источника. Во сколько раз нужно увеличить сечение подводящих проводов, чтобы уменьшить долю потерь в проводах до $\beta_2 = 0{,}01$?

2. Невесомые стержни связаны невесомыми пружинами жесткостью k_0 у верхней и нижней пружин и жесткостью k у средних пружин, присоединенных к телу массой m (рис.1). Исходно пружины не деформированы. Под действием силы, приложенной к правому стержню, система начинает двигаться с постоянным ускорением a, направленным вдоль пружин. Найдите, на сколько при этом возрастет расстояние между стержнями.

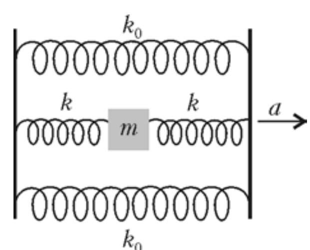


Рис. 1

3. Незаряженные проводящие пластины имеют по два обширных плоских параллельных участка площадью S_1 и S_2 с малыми зазорами d_1 и d_2 между ними (рис.2). Протяженность области изгиба мала в сравнении с размерами пластин. Перпендикулярно плоскости симметрии пластин включают внешнее однородное электрическое поле напряженностью E. Найдите напряженности E_1 и E_2 полей внутри зазоров между плоскими участками.

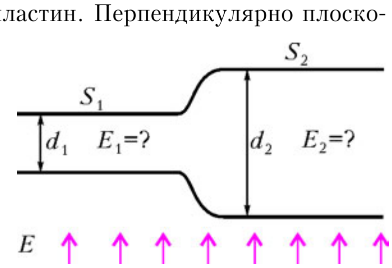


Рис. 2

4. Стальную пластинку погружают плашмя в воду в глубоком озере и отпускают. Оцените, во сколько раз возрастет разность давлений на нижнюю и верхнюю поверхности пластинки на большой глубине по сравнению с начальным моментом движения.

5. Сосуд с плоским дном установлен с небольшим наклоном, в сосуде – холодная вода. Чашку ставят вверх дном до соприкосновения ее с дном сосуда. Она остается на месте. Заменяют холодную воду нагретой. Поставленная таким же образом чашка через некоторое время начинает соскальзывать. Объясните явление.

Вариант 2

1. Капля, падающая вертикально, пролетает мимо окна высотой h за время t. Найдите ее скорости при пролете мимо нижнего и верхнего краев окна. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения ровно g.

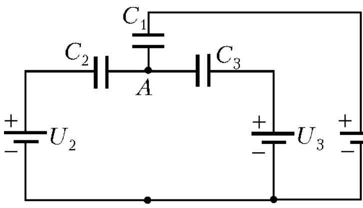


Рис. 3

2. Батареи с напряжениями U_1, U_2 и U_3 соединили так, что они имеют общий «минус» (рис.3). Плюсы этих батарей подсоединили к трем обкладкам исходно незаряженных конденсаторов с емкостями C_1, C_2 и C_3, а три другие обкладки конденсаторов соединили проводниками в точке A. Каково напряжение между точками A и B?

3. В вертикальном теплоизолированном цилиндре находится гелий, давление которого уравновешивает поршень массой M с подвешенным к нему грузом массой m (рис.4). Выше поршня – вакуум. Поршень находится на высоте H, а груз – на высоте H_0 над дном цилиндра. Груз отрывается, падает на дно и прилипает к нему. На сколько поднимется поршень, когда снова установится равновесие? Считать, что вся выделенная энергия пошла на нагрев газа. Объем груза мал по сравнению с объемом гелия. Ускорение свободного падения равно g.

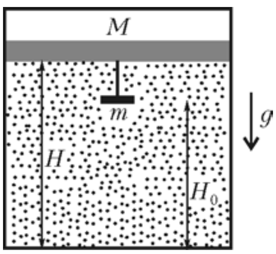


Рис. 4

4. Оцените, на сколько масса стакана с тяжелой водой (D_2O) больше массы стакана с обычной водой.

5. Из бумаги склеены два одинаковых конуса, пример выкройки конуса приведен на рисунке 5. Один конус обрезают по краю и вкладывают в него обрезки. Если конусы одновременно отпустить с одной и той же высоты, один из них при падении заметно отстает от другого. Если из меньшего конуса убрать обрезки, то отпущенные одновременно конусы достигают пола одновременно. Объясните, почему так происходит.

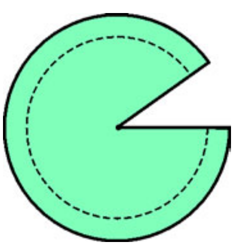


Рис. 5

Публикацию подготовили Е.Балдин, И.Воробьев, Г.Меледин

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Математический факультет

Вариант 1

1. Разложите число 16 на множители так, чтобы их сумма была равна 10. Найдите частное от деления большего множителя на меньший.

2. При каких значениях переменной x значения функции

$$y = 4\log_{1/9}^2 x + 2,5\left|\log_{1/3} x\right| - 1,5$$

не меньше 0?

3. Найдите наибольшее целое значение y, для которого

$$2^{2y} \cdot 6^y \ge 2^y \cdot 3^{3y}.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\cos 7x - \cos(2\pi - x) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 3x\right) = 0.$$

5. При каких k уравнение

$$kx^2 + 2(k+1)x + 2k = 0$$

имеет корни одного знака?

6. Решите неравенство

$$\sqrt{5x - x^2} \ge x - 2.$$

7. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, кратных 5.

8. Из точки A окружности радиуса 8 проведены две равные хорды AB и AC, образующие угол $60°$. Найдите расстояние от центра этой окружности до прямой BC.

9. Один из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника лежит в плоскости α, а другой образует с ней угол, равный $45°$. Найдите угол, который образует гипотенуза с плоскостью α.

Вариант 2

1. Половину пути мотоциклист ехал с намеченной скоростью 45 км/ч. Затем задержался на 10 мин, а поэтому, чтобы наверстать потерянное время, он увеличил скорость на 15 км/ч. Каков весь путь мотоциклиста?

2. Определите сумму нечетных чисел первой сотни.

3. Решите уравнение

$$8^{4\sqrt{6-x-x^2}} - 16^{6\sqrt{x^2-4}} = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_9 x^2 - 6\log_x 3 \le 1.$$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$(x+1)\sqrt{16 - x^4} \ge 0.$$

6. Вычислите

$$\frac{2\sin\alpha + \left(\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 - 1}{-2\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin 2\alpha},$$

если $\cos\alpha = 0,5$.

7. При каких значениях b уравнение

$$x + 2 = \frac{1 + 3b}{x}$$

имеет два корня?

8. Найдите длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25, а углы α при основании таковы, что $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

9. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $3\sqrt{3}$, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $30°$. Найдите объем пирамиды.

Публикацию подготовили О.Корсакова, Н.Подходова

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 9x - 22}\sqrt{x^2 - 4x - 21} = 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2^2 x^4 + 3\log_2 x^2 - 1 = 0 .$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2x\sqrt{4x^2+3}} \ge \sqrt{4x^2+3} - 4x .$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Найдите отношение $\angle ADB : \angle DBC$, если $\angle CAB : \angle ABC : \angle BCA = 1:16:3$, $\angle DAC = 54°$ и $DA = DC$.

5. При каких значениях параметра c уравнение

$$3\sin x + 3\cos x + 2\sin 2x + c = 0$$

имеет решение?

Вариант 2

(олимпиада-2005)

1. Две команды, каждая из трех спортсменов, участвуют в эстафете, состоящей из трех этапов одинаковой длины. Спортсмены первой команды на всех этапах бегут с одинаковой скоростью. На 1-м этапе спортсмен второй команды бежит медленнее своего соперника на 1 км/ч, на 2-м этапе спортсмены обеих команд бегут с одинаковой скоростью, а на 3-м этапе спортсмен второй команды бежит быстрее своего соперника на 1 км/ч. Определите команду-победительницу.

2. Решите неравенство

$$|2x-1| - |x| + |x+1| > 315 - 100\pi .$$

3. Покажите, что если $p > 0$ и $q > 0$, то квадратные трехчлены $x^2 + px - q$ и $-x^2 + px + q$ имеют действительные корни, причем между корнями каждого из них находится один из корней другого.

4. В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 2$ проведены медиана BD и биссектриса AE, а через точку их пересечения проведена прямая CF. Найдите отношение площадей треугольников DEF и ABC.

5. При каком наибольшем значении a уравнение

$$2\sin x + b\sin 2x + a = 1 - 2\cos x$$

имеет решение для всех b?

6. Найдите все целые решения уравнения

$$xy^2 - x^3 + y^2 - x^2 = 16 .$$

7. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2003}{2004} < \frac{1}{\sqrt{2005}} .$$

8. Найдите область значений функции

$$y = \sqrt{7x - x^2} - \sqrt{35 + 2x - x^2} .$$

9. Изобразите множество точек $(x;y)$, задаваемых неравенством

$$x^2 - 4|x| + y^2 - 4|y| + \frac{8}{3} \le 0 ,$$

и найдите его площадь.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(олимпиада-2005)

Выберите правильный ответ

1. Автомобиль трогается с места, в течение 8 с равноускоренно разгоняется и, набрав скорость 50 м/с, затем движется с постоянной скоростью. Через какое время автомобиль окажется на расстоянии 1 км от начальной точки?

1) 16 с; 2) 18 с; 3) 20 с; 4) 24 с; 5) 28 с.

2. Тело бросают с поверхности земли, его начальная скорость направлена под углом 30° к горизонту. Найдите дальность броска L, если в полете тело поднималось на максимальную высоту h над землей. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) $L = \sqrt{3}h$; 2) $L = 2\sqrt{3}h$; 3) $L = 4\sqrt{3}h$; 4) $L = 2h$; 5) $L = 4h$.

3. Два шара движутся навстречу друг другу по одной прямой. Массы шаров m_1 и $m_2 = 2m_1$. Кинетическая энергия первого шара равна 4 Дж. Какой кинетической энергией должен обладать второй шар, чтобы в результате соударения шары остановились?

1) 1 Дж; 2) 2 Дж; 3) 4 Дж; 4) 8 Дж; 5) 12 Дж.

4. В баллоне находится идеальный газ при температуре 60 °C и давлении 100 кПа. Из баллона выпускают половину газа, а оставшийся нагревают на 60 °C. Каким станет давление в баллоне?

1) 100 кПа; 2) 169 Па; 3) 236 кПа; 4) 59 кПа; 5) 75 кПа.

5. Одно и то же количество идеального газа переходит из состояния *1* в состояние *2* тремя различными способами (рис.1). В каком из трех процессов a, b, c изменение внутренней энергии газа максимально?

1) a; 2) b; 3) c; 4) ΔU одинаково во всех процессах; 5) $\Delta U = 0$ во всех процессах.

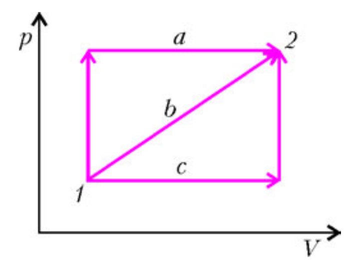


Рис. 1

6. Имеются два заряженных конденсатора: емкость первого 100 мкФ, напряжение на нем 200 В; емкость второго 400 мкФ, напряжение на нем 300 В. Одноименные пластины конденсаторов соединяют тонкими проводниками. Какое напряжение установится в системе?

1) 240 В; 2) 250 В; 3) 260 В; 4) 280 В; 5) 290 В.

7. К источнику ЭДС с внутренним сопротивлением 4 Ом подключен реостат. Укажите два значения сопротивления реостата, при которых на нем выделяется одна и та же мощность. Сопротивлением проводов пренебречь.

1) 1 Ом и 5 Ом; 2) 1 Ом и 16 Ом; 3) 2 Ом и 6 Ом; 4) 2 Ом и 10 Ом; 5) 2 Ом и 16 Ом.

8. Сила тока через катушку индуктивности изменяется в соответствии с графиком на рисунке 2. Во сколько раз отличаются энергии магнитного поля катушки в моменты времени $t_1 = 0,4$ с и $t_2 = 2$ с?

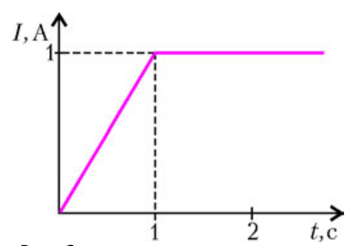


Рис. 2

1) В 2,5 раза; 2) в 5 раз; 3) в 6,25 раз; 4) в 7,5 раз; 5) в 25 раз.

9. При колебаниях маятника его координата изменяется по закону $x(t) = 0,05\sin 10t$ (м). Найдите скорость маятника в начальный момент $t = 0$.

1) 0,05 м/с; 2) 0,1 м/с; 3) 0,5 м/с; 4) 2 м/с; 5) 0.

10. На дифракционную решетку по нормали падает монохроматический свет. Известно, что период решетки в 10 раз больше длины волны падающего света. Под каким углом дифракции будет наблюдаться максимум 1-го порядка?

1) $\arcsin 0,1$; 2) $\arcsin 0,05$; 3) $\arcsin 0,01$; 4) 10°; 5) 30°.

Вариант 2

Выберите правильный ответ

1. Массы тел, изображенных на рисунке 3, равны $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг; нити невесомые и нерастяжимые. К первому телу приложена горизонтальная сила $F = 6$ Н. Найдите силу натяжения нити, которая связывает тела массами m_1 и m_2. Трения нет.

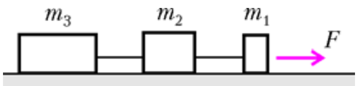


Рис. 3

1) 6 Н; 2) 2 Н; 3) 3 Н; 4) 4 Н; 5) 5 Н.

2. Тело бросают с начальной скоростью, направленной под углом $60°$ к горизонту, сообщив ему кинетическую энергию 20 Дж. Найдите кинетическую энергию тела в верхней точке траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) 5 Дж; 2) 10 Дж; 3) 20 Дж; 4) 17,3 Дж; 5) 0.

3. Тележка едет без трения по столу. На тележку быстро насыпают песок, масса которого равна массе тележки. Сравните кинетическую энергию тележки с песком K_2 с начальной кинетической энергией тележки K_1.

1) $K_2 > K_1$ в 2 раза; 2) $K_2 > K_1$ в 4 раза; 3) $K_2 = K_1$; 4) $K_2 < K_1$ в 2 раза; 5) $K_2 < K_1$ в 4 раза.

4. Когда из баллона выпустили некоторое количество газа, давление в баллоне уменьшилось в 4 раза, а абсолютная температура газа понизилась на 25%. Какую часть газа выпустили?

1) $1/2$; 2) $2/3$; 3) $3/4$; 4) $3/5$; 5) $4/5$.

5. Расширяясь, одноатомный идеальный газ совершил работу 200 Дж. Как изменилась внутренняя энергия газа, если в ходе расширения он не получал и не отдавал тепло?

1) Уменьшилась на 200 Дж; 2) не изменилась; 3) увеличилась на 200 Дж; 4) увеличилась на 300 Дж; 5) увеличилась на 500 Дж.

6. Плоский воздушный конденсатор отключают от источника и заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. Как изменится при этом энергия электрического поля конденсатора?

1) Увеличится в 4 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) уменьшится в 4 раза; 4) уменьшится в 2 раза; 5) не изменится.

7. Два резистора сопротивлениями R_1 и R_2 соединены параллельно. Сила тока через резистор сопротивлением R_1 равна 2 А, напряжение на резисторе сопротивлением R_2 равно 4 В. Что можно сказать о величинах сопротивлений резисторов?

1) $R_1 = 2$ Ом; 2) $R_2 = 2$ Ом; 3) $R_1 = R_2 = 2$ Ом; 4) $1/R_1 + 1/R_2 = 2$ Ом; 5) $R_1 + R_2 = 0,5$ Ом.

8. Заряженная частица движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом R. Сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля (сила Лоренца), равна F. Найдите работу этой силы за один оборот.

1) $2RF$; 2) πRF; 3) $2\pi RF$; 4) сила не совершает работы; 5) работа зависит от скорости частицы.

9. Амплитуда колебаний математического маятника 25 см, его максимальная скорость 0,44 м/с. Найдите длину маятника. Колебания можно считать гармоническими.

1) 0,57 м; 2) 1,76 м; 3) 2,6 м; 4) 3,2 м; 5) 5,7 м.

10. Найдите максимально возможный угол преломления луча, который входит в стекло из воздуха. Показатель преломления стекла 1,5, показатель преломления воздуха 1.

1) $45°$; 2) $60°$; 3) $90°$; 4) $\arcsin(3/4)$; 5) $\arcsin(2/3)$.

Публикацию подготовили Е.Веденская, В.Галкин, М.Кузьмин, Т.Медина, А.Миронов, В.Мирошкин, Л.Муравей, Е.Никулин, В.Панферов, А.Покровский

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение
$$\frac{a-0,25}{\sqrt{a}-0,5}-\frac{a\sqrt{a}-0,125}{a+0,5\sqrt{a}+0,25}.$$

2. Найдите наибольшее целое решение неравенства
$$\sqrt{3(10-x)} > 4-x.$$

3. Сумма 7-го и 16-го членов арифметической прогрессии равна 11. Найдите сумму первых 22 членов этой прогрессии.

4. Решите уравнение
$$\left|-x^2-4\right| = -4x.$$

5. Решите уравнение
$$2^x + 2^{x+2} = 20.$$

6. Вычислите
$$\frac{3^{-\log_3 2}-1}{\log_2\sqrt{2}}.$$

7. Вычислите
$$\cos 95°\cos 5° + 0,5(\sin 10° + 1).$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения
$$\operatorname{tg}(75°+x)+\operatorname{tg}(15°-x) = 2.$$

9. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором через начало координат проходят три различные прямые, касающиеся графика функции
$$y = x^3 + 10,8x^2 - 25x + a.$$

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства
$$\log_{|x|}(4x+140) \ge 2?$$

11. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 1,84 и периметром 4 вписана окружность. Вторая окружность проходит через вершины острых углов так, что вписанная окружность касается ее изнутри. Найдите радиус второй окружности.

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ противоположные боковые ребра пирамиды образуют угол φ, $\cos\varphi = 0,25$. Около пирамиды $SABCD$ описан шар радиуса 9. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды $MABCD$, где M – середина какого-нибудь бокового ребра пирамиды.

Вариант 2

1. Упростите выражение
$$\left(\frac{2\sqrt[4]{3}xy}{x^2y^2-\sqrt{3}}+\frac{xy-\sqrt[4]{3}}{2xy+2\sqrt[4]{3}}\right)\frac{2xy}{xy+\sqrt[4]{3}}-\frac{xy}{xy-\sqrt[4]{3}}+1$$
и найдите его значение при $x = 19/31$, $y = 98/15$.

2. Решите уравнение
$$\sqrt{0,5\left(x^2-11x+32\right)} = x-6.$$

3. Произведение 6-го и 46-го членов геометрической прогрессии равно 0,81. Найдите 26-й член этой прогрессии, если известно, что он положителен.

4. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства

$$|x+7,5|>10 .$$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{x-17}}{5^{x-17}}>\frac{3\sqrt{3}}{125} .$$

6. Вычислите

$$\log_{3,8}10\cdot\lg\sqrt[5]{3,8} .$$

7. Вычислите

$$\frac{2\sin^2 50^\circ-1}{2\operatorname{ctg}95^\circ\cos^2 175^\circ} .$$

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin 4x-\sin\frac{\pi}{3}\cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

9. При каком значении параметра a существует единственная прямая, касающаяся графика функции $y=x^2+a$ и графика функции $y=\frac{\sqrt{6}}{9}x^3$?

10. Найдите меньший корень уравнения

$$\frac{x}{90}=\left(\frac{10}{3}\right)^{\log_x 300} .$$

11. Около прямоугольного треугольника с гипотенузой 64 описана окружность. В него же вписана окружность, касающаяся гипотенузы в точке M. Окружность радиуса 9 касается вписанной окружности снаружи в точке M и описанной окружности – изнутри. Найдите радиус вписанной окружности.

12. Перпендикуляр, опущенный из центра основания O правильной четырехугольной пирамиды на ее боковую грань, пересекает эту грань в точке N, а вписанную в пирамиду сферу – в точке M. Известно, что $OM = ON = 2$. Найдите объем пирамиды.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения g считайте равным 10 м/с^2 (кроме особо оговоренных случаев).

Вариант 1

1. За две секунды движения тело прошло путь 20 м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 3 раза по сравнению с первоначальной. Каково было ускорение тела?

2. На наклонной плоскости длиной 15 м и высотой 9 м лежит груз массой 15 кг. Коэффициент трения равен 0,8. Какую минимальную силу надо приложить к грузу вдоль плоскости, чтобы сдвинуть груз вниз?

3. Шар массой 100 г, двигавшийся со скоростью 5 м/с, сталкивается абсолютно неупруго с шаром массой 150 г, двигавшимся в том же направлении со скоростью 4 м/с. Найдите скорость шаров после удара. Ответ дайте в см/с.

4. Однородный стержень с прикрепленным на одном из его концов грузом массой 7,5 кг находится в равновесии, если точка опоры отстоит от груза на 1/7 длины стержня. Чему равна масса стержня?

5. При изобарном расширении газ совершил работу 200 Дж, а его внутренняя энергия увеличилась при этом на 500 Дж. Затем газу в изохорном процессе сообщили такое же количество теплоты, как и в первом случае. На сколько увеличилась внутренняя энергия газа в результате этих двух процессов?

6. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы переместить заряд 50 мкКл в однородном поле напряженностью 2 кВ/м на расстояние 0,7 м, если перемещение происходит под углом 60° к силовым линиям поля? В ответе укажите модуль полученной величины.

7. Три источника постоянного тока с ЭДС 1 В, 3 В и 5 В и внутренними сопротивлениями 1 Ом каждый соединены последовательно и замкнуты накоротко. Определите силу тока в цепи.

8. Изображение предмета в собирающей линзе получено в натуральную величину. Во сколько раз уменьшится размер изображения, если расстояние от предмета до линзы увеличить в 4 раза?

9. Демонстрационная установка состоит из наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю» радиусом R. Установка закреплена на тележке, стоящей на горизонтальной плоскости. Груз массой 0,2 кг съезжает с высоты $2{,}5R$, отсчитанной от нижней точки петли. Чему равна сила давления груза на поверхность в верхней точке петли? Трением пренебречь. Масса установки вместе с тележкой вдвое больше массы груза.

10. Объем цилиндра откачивающего поршневого насоса в 4 раза больше объема откачиваемого сосуда. За сколько ходов поршня давление в сосуде упадет от атмосферного (100 кПа) до 800 Па? Температура постоянна.

11. Два иона, имеющие одинаковые заряды, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый начал двигаться по окружности радиусом 8 см, второй – по окружности радиусом 2 см. Во сколько раз масса первого иона больше, чем масса второго, если известно, что они прошли одну и ту же разность потенциалов?

12. К динамометру, закрепленному вертикально, подвесили груз. При этом груз стал совершать гармонические колебания с циклической частотой 5 с$^{-1}$. На сколько сантиметров окажется растянутой пружина динамометра после полного прекращения колебаний груза?

Вариант 2

1. Мяч брошен с некоторой высоты вертикально вниз со скоростью 4,5 м/с. Найдите среднюю скорость движения мяча за первые пять секунд движения. Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

2. В лифте, поднимающемся с ускорением 1,4 м/с^2, на пружине жесткостью 700 Н/м висит груз массой 0,5 кг. Чему равно (в мм) удлинение пружины? Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

3. Тело массой 2 кг поднимают с земли вертикально вверх, прикладывая силу 30 Н. Какую мощность развивает эта сила через 2 с после начала подъема?

4. Определите массу (в тоннах) льдины, плавающей в воде, если объем выступающей части льдины 4 м^3. Плотность льда 900 кг/м^3, плотность воды 1000 кг/м^3.

5. На электроплитке мощностью 1200 Вт нагревается до кипения 2,4 кг воды за 20 мин. Начальная температура воды 2° °С, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К). Определите КПД (в процентах) установки.

6. Две параллельные металлические пластины, находящиеся на расстоянии 5 см друг от друга в вакууме, заряжены до разности потенциалов 2 кВ. Какая сила будет действовать на заряд 300 мкКл, помещенный между пластинами? Поле между пластинами считать однородным.

7. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью $0{,}001\ \text{м}^2$, расположенный перпендикулярно линиям поля. Какой величины ток (в мкА) потечет по витку, если индукция поля будет убывать с постоянной скоростью 0,05 Тл/с? Сопротивление витка 2 Ом.

8. Математический маятник длиной 0,1 м совершает гармонические колебания с амплитудой 0,07 м. Определите наибольшее ускорение грузика маятника.

9. На чашку весов массой 200 г, подвешенную на пружине, с высоты 30 см падает груз массой 800 г. Найдите амплитуду (в см) колебаний чашки с грузом после абсолютно неупругого удара. Жесткость пружины 400 Н/м.

10. Идеальный газ нагревают сначала изобарно от 300 К до 450 К, а затем – изохорно до 600 К. После этого газ изобарно сжимают до первоначального объема. Чему равна конечная температура газа (в кельвинах)?

11. При ремонте электроплитки длина спирали была увеличена на 0,25 первоначальной длины. На сколько процентов уменьшилась мощность плитки?

12. Собирающая линза дает на экране четкое изображение предмета, увеличенное в 2 раза. Расстояние между предметом и экраном на 15 см больше двойного фокусного расстояния линзы. Найдите (в см) расстояние от линзы до экрана.

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение
$$\frac{(x-2)^2}{(x-1)\left(x^2-x-2\right)}+\frac{x^2+2x-8}{(x+1)\left(x^2-3x+2\right)}.$$

2. Решите уравнение
$$x+2\sqrt{x}=8.$$

3. Найдите произведение общих корней уравнений
$$x^2+4x+2=0 \text{ и } x^3+3x^2-2x-2=0.$$

4. Найдите наименьший из общих положительных периодов функций $\sin^2 9x$ и $\operatorname{tg}^2 6x$.

5. Найдите функцию $y=f(x)$, график которой симметричен графику функции $y=\frac{1}{x}$ относительно точки $(-1;1)$.

6. Найдите множество значений функции
$$y=\frac{x^2+5}{x+2}.$$

7. Решите уравнение
$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2x+3}.$$

8. Решите неравенство
$$\sqrt{\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)^2-1}\le\frac{x}{4}-\frac{1}{x}.$$

9. Найдите радианную меру угла
$$\alpha=\operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}}{2}.$$

10. Решите уравнение
$$\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}=1.$$

11. Решите уравнение
$$3\operatorname{arctg}^2 x+\operatorname{arcctg}^2 x=\frac{\pi^2}{4}.$$

12. Решите уравнение
$$2^{\sqrt{-x}}\cdot 3^{-\sqrt{-x}}=2^x\cdot 3.$$

13. Найдите сумму корней уравнения
$$3\lg x=\lg\left(4x^2-5\right).$$

14. Решите неравенство
$$\frac{2-\log_x(5x-6)}{\log_x(x-1)}\le 0.$$

15. Известно, что числа 0, 105, 280 являются членами некоторой арифметической прогрессии. Какое наибольшее значение может принимать разность этой прогрессии?

16. На параболе $x=-\frac{y^2}{4}-1$ найдите все точки, касательные в которых являются также касательными к параболе $y=\frac{x^2}{4}+1$.

17. На графике функции $y=\sin x-\cos x$ найдите все точки, имеющие наибольшую ординату.

18. Длина основания равнобедренного треугольника равна 2, а длина боковой стороны равна 3. К одной из боковых сторон проведена высота, а к другой – биссектриса. Найдите отношение длин отрезков, на которые биссектриса делит высоту.

19. У правильной треугольной пирамиды известны радиус вписанного шара, равный 2, и высота, равная 6. Найдите длину стороны основания.

20. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases}(x+a)^2+y^2=1,\\ x^2+(y-a)^2=1\end{cases}$$
имеет не менее двух различных решений?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Убедитесь, что при $x=5\sqrt{5}+9$ выражение $\sqrt{x-6\sqrt{-9}}-\sqrt{x-9}$ принимает целое значение. Укажите это значение.

2. Найдите число $a>0$, составляющее 50% от a^2-48.

3. Какое число больше: $a=\sqrt[3]{22}-2\sqrt[3]{2}$ или $b=\sqrt[3]{33}-3$?

4. Найдите $\operatorname{tg}x$, если
$$\frac{\sin x+3\cos x-\sqrt{5}}{\sqrt{\sin x}+1}=0.$$

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}2^{x-1}+3y=10,\\ 3\cdot 2^x-10y=4.\end{cases}$$

6. Решите уравнение
$$\sqrt{x+1}=5-3|x-2|.$$

7. Укажите целое число, являющееся значением выражения
$$\log_3 8\cdot\log_{\sqrt{2}}125\cdot\log_5 9.$$

8. Решите уравнение

$$\left|4\sin^2 x - 1\right| = 4\cos 2x - 2\,.$$

9. Решите неравенство

$$\frac{|x+1|-2}{x-1} \ge 1\,.$$

10. Найдите центр симметрии графика функции

$$y = \log_3\left(3x - 3 + 3\sqrt{x^2 - 2x + 2}\right).$$

11. В арифметической прогрессии третий член – натуральное число, меньше 7, седьмой член – натуральное число, а сумма первых двенадцати членов равна 33. Найдите пятый член этой прогрессии.

12. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии равна учетверенной сумме первых четырех членов. Найдите знаменатель прогрессии.

13. При каких целых значениях n число

$$A = \frac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 14n + 19}$$

является целым?

14. Найдите наименьший положительный период функции

$$y = 4\cos^4 3x - 2\cos 6x\,.$$

15. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{9\sin^2 x + 27\sin x + 24}{3\sin x + 4}\,.$$

16. Составьте уравнения тех касательных графика функции $y = \sqrt{x^2 + 2}$, которые образуют с осями координат треугольник площади $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

17. Решите уравнение

$$\arccos\frac{2}{x} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\,.$$

18. Зная длины сторон $AB = 3$, $BC = 6$, $AC = 3\sqrt{7}$ треугольника ABC, найдите в градусах величину угла AOC, где O – центр окружности, вписанной в треугольник.

19. Куб со стороной 3 вписан в конус так, что одна из граней куба лежит в плоскости основания конуса. При какой высоте конус имеет наименьший объем?

20. При каких значениях параметра a уравнение

$$a(x-2)^2 = 24\left(2|x-4| + 1\right)$$

имеет ровно три решения?

Публикацию подготовили
И.Комарчев, А.Моисеев, С.Преображенский

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет, факультет прикладной математики – процессов управления)

1. Найдите первый член конечной арифметической прогрессии, состоящей из десяти членов, такой, что после вычеркивания одного из них сумма оставшихся равна 18, сумма всех членов, находящихся перед вычеркнутым, равна 7, а вычеркнутый член меньше 2.

2. Решите неравенство

$$\frac{3x}{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}} - \frac{3x - 2\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}} \le 2\,.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x\left(2\sin x - 3\right) = 2\sqrt{3}\cos 2x + 2\sin x\,.$$

4. Медиана AM треугольника ABC пересекает вписанную в него окружность, радиус которой равен r, в точках P и Q. Найдите площадь треугольника, если известно, что хорда PQ в два раза длиннее каждого из отрезков AP и MQ.

5. К сфере, вписанной в треугольную пирамиду, проведены касательные плоскости, параллельные граням пирамиды. Вокруг четырех пирамид, отсекаемых этими плоскостями от исходной пирамиды, описаны сферы. Радиусы трех из них равны 10. Найдите радиус четвертой сферы, если известно, что радиус описанной сферы исходной пирамиды равен 19.

Вариант 2

(экономический факультет: прикладная информатика (в экономике), математические методы в экономике)

1. Числа $-\frac{9}{64}$ и 18 являются членами геометрической прогрессии. Найдите ее знаменатель, если известно, что он лежит на интервале $\left(-2; -\frac{4}{5}\right)$ и тринадцатый член прогрессии равен $\frac{9}{8}$.

2. Решите неравенство

$$\log_9(2+x)^2 + \log_3(2-x) < \log_3 4\,.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x + \sin 3x = \sin 4x + \cos 4x + 1\,.$$

4. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, одинаковы. Найдите угол BAC, если известно, что $BD : CD = 2 : 3$ и $AB = AD$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{10 + (7-a)x - x^3} - \sqrt{4 - ax} = 2 - \sqrt{10 + 7x - x^3}$$

имеет ровно два решения.

Публикацию подготовили А.Громов, Ю.Чурин

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Более 25 лет при механико-математическом факультете Московского государственного университета (МГУ) имени М.В.Ломоносова работает Малый механико-математический факультет (МММФ). За годы своего существования заочное отделение Малого мехмата выпустило свыше 10000 учащихся, многие из которых стали студентами мехмата и других факультетов МГУ.

Основные задачи Малого мехмата – расширение математического кругозора школьников и углубление их знаний как по темам школьной программы, так и по разделам математики, не входящим в программу средней школы.

В 2006 году *заочное отделение* Малого мехмата объявляет прием учащихся в 8 и 9 классы на 2006/07 учебный год. На заочное отделение принимаются учащиеся из России (в том числе и проживающие в Москве), стран СНГ и Балтии.

Существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством преподавателя и может включать в себя не более 15 учащихся из одной параллели. Как правило, материалы методических разработок изучаются такими группами во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как один учащийся, т.е. оформляет по каждому заданию *одну* работу и оплачивает обучение всей группы как обучение *одного* учащегося.

Зачисление в 8 и 9 классы для индивидуальных учеников производится *на конкурсной основе* по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы (коллективным ученикам выполнять вступительную работу не требуется). Обучение на заочном отделении платное. Информация об условиях оплаты будет выслана учащимся, зачисленным на заочное отделение, осенью 2006 года, после проверки вступительных работ. В 2005/06 учебном году стоимость проверки одного задания составляет 110 руб. (для коллективных учеников – 150 руб.), однако в 2006/07 учебном году она может быть немного повышена. За год учащийся выполняет 6–8 заданий. Школьники, успешно закончившие обучение на заочном отделении, получают свидетельства об окончании Малого мехмата (прошедшим курс обучения по форме «Коллективный ученик» вместо свидетельств выдаются справки об окончании Малого мехмата).

Желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата (как в 8, так и в 9 класс) должны *не позднее 20 июня 2006 года* выслать в наш адрес *простым письмом* решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Вступительную работу необходимо выполнить *в школьной тетради в клетку*. Записывать решения в тетрадь следует в том порядке, в котором задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

1) Фамилия, имя учащегося
2) Класс (в 2006/07 учебном году)
3) Полный домашний адрес *с указанием индекса почтового отделения*
4) Электронный адрес, по которому с вами можно связаться (если он есть)
5) Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение

Группам «Коллективный ученик» *не нужно* выполнять вступительную работу, необходимо лишь *не позднее 20 сентября 2006 года* выслать *письмом* или *по электронной почте* следующие данные:

1) Фамилия, имя, отчество руководителя группы
2) Фамилии и имена учащихся (не более 15 человек) в алфавитном порядке
3) Класс (в 2006/07 учебном году)
4) Полный адрес руководителя группы (по которому следует высылать задания) *с указанием индекса почтового отделения*
5) Электронный адрес, по которому с вами можно связаться (если он есть)
6) Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение

Наш почтовый адрес: *119992, Москва, ГСП-2, Ленинские горы, МГУ, мехмат, МММФ.*

Электронный адрес: mmmf1@yandex.ru

Вечернее отделение Малого мехмата приглашает на занятия по субботам всех желающих школьников 6–11 классов из Москвы и ближнего Подмосковья.

Справки по телефону 939-39-43 или по электронной почте. Более подробную информацию о Малом мехмате можно найти в Интернете по адресу:

http://mmmf.math.msu.su

Вступительная работа

1. Даны 2006 чисел. Известно, что сумма любых пяти из них положительна. Может ли сумма всех 2006 чисел быть отрицательна?

2. Решите уравнение (x, y, z – целые положительные числа)

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{20}{7}.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BL. Докажите, что если $\angle BAC = 36°$, то $AL = BC$.

4. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$3x + 5y = xy.$$

5. В семье несколько детей. Сумма их возрастов в 8 раз меньше суммы возрастов родителей, но через 4 года она будет в 3 раза меньше суммы возрастов родителей, а еще через 4 года – всего в 2 раза меньше. Сколько детей в семье?

6. Число $a + \frac{1}{a}$ целое. Докажите, что число $a^2 + \frac{1}{a^2}$ тоже целое.

7. Сколько существует целых чисел от 1 до 2006, не делящихся ни на 7, ни на 13?

8. Измерив длины всех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника, получили следующие пять чисел: 3, 4, 6, 10, 14. Какое из них равно длине измеренной диагонали?

9. Изобразите на координатной плоскости $(x; y)$ множество всех точек, координаты которых удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 = 2xy$.

10. 30 волейбольных команд провели первенство по круговой системе в один круг (это значит, что каждая команда сыграла с каждой по одному разу). Оказалось, что каждая команда выиграла хотя бы один матч. Докажите, что найдутся три команды А, Б и В такие, что А выиграла у Б, Б выиграла у В, В выиграла у А (ничьих в волейболе не бывает).

XLVI Международная математическая олимпиада

XLVI Международная математическая олимпиада (ММО) прошла с 8 по 19 июля 2005 года в Мексике, в городе Мерида. Место для проведения олимпиады было выбрано удачно: Мерида расположена на полуострове Юкатан – земле поселений майя, поэтому экскурсии в древние города Дзибилчалтун и Чичен-Ица стали для участников олимпиады лучшим знакомством с культурой и загадками с одной из древнейших цивилизаций Америки.

Олимпиада в Мексике стала особенно представительной – она собрала 513 школьников из 91 страны мира.

В команду России в этом году вошли одиннадцатиклассники

Василий Астахов – Саратов, ФТЛ 1,

Андрей Гаврилюк – Долгопрудный, ФМШ 5,

Никита Калинин – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Павел Козлов – Ярославская обл., школа с. Шурскол Ростовского района

и десятиклассники

Алексей Катышев – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Александр Магазинов – Ярославль, лицей 33.

Наша команда выступила очень достойно, завоевав четыре золотые и две серебряные медали. Так выглядят результаты российских участников олимпиады (традиционно, правильное решение каждой из 6 задач оценивалось в 7 баллов):

	1	2	3	4	5	6	Сумма баллов	Медаль
А.Гаврилюк	7	7	7	7	7	7	42	золотая
А.Магазинов	7	7	6	7	7	7	41	золотая
Н.Калинин	7	7	7	7	7	1	36	золотая
П.Козлов	7	7	0	7	7	7	35	золотая
А.Катышев	7	7	0	7	7	2	30	серебряная
В.Астахов	7	7	0	7	0	7	28	серебряная

В неофициальном командном зачете в который раз первенство праздновали китайцы. Россия стала третьей, отстав от команды США всего на балл. Справедливости ради отметим, что наши ребята не уступили американцам ни в количестве, ни в достоинстве завоеванных медалей и даже сумели превзойти их по количеству полностью решенных задач. Приводим результаты первых двадцати команд:

№	Страна	Золотая медаль	Серебряная медаль	Бронзовая медаль	Сумма баллов
1.	Китай	5	1	0	235
2.	США	4	2	0	213
3.	Россия	4	2	0	212
4.	Иран	2	4	0	201
5.	Корея	3	3	0	200
6.	Румыния	4	1	1	191
7.	Тайвань	3	2	1	190
8.	Япония	3	1	2	188
9.	Венгрия	2	3	1	181
10.	Украина	2	2	2	181
11.	Болгария	2	3	1	173
12.	Германия	1	3	2	163
13.	Великобритания	1	3	2	159
14.	Сингапур	0	4	2	145
15.	Вьетнам	0	3	3	143
16.	Чехия	1	3	1	139
17.	Гонконг	1	3	1	138
18.	Беларусь	1	3	1	136
19.	Канада	1	3	1	132
20.	Словакия	0	4	2	131

Благодарим всех, кто так или иначе содействовал подготовке сборной России. Особую благодарность адресуем преподавателям-тренерам А.Бадзяну, С.Берлову, И.Богданову, А.Гарберу, А.Глазырину, В.Дольникову, Р.Карасеву, Д.Карпову, М.Пратусевичу, Д.Флаассу, Г.Челнокову, работавшим с командой на последнем этапе подготовки – летних учебно-тренировочных сборах.

Мы также признательны Федеральному агентству по образованию, Стипендиальному фонду Владимира Потанина, компании «Спортмастер», поддерживающим работу по подготовке национальной команды России по математике.

В заключение приводим условия задач, а также решения, большинство из которых написаны школьниками на олимпиаде.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. На сторонах равностороннего треугольника ABC выбраны шесть точек: A_1, A_2 на BC, B_1, B_2 на CA и C_1, C_2 на AB. Эти точки являются вершинами выпуклого шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, стороны которого имеют равные длины. Докажите, что прямые A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 пересекаются в одной точке.

(Румыния)

2. Пусть $a_1, a_2 \ldots$ – последовательность целых чисел, в которой содержится бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Известно, что для каждого натурального n все n остатков от деления чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на n различны. Докажите, что каждое целое число встречается в этой последовательности ровно один раз.

(Нидерланды)

3. Пусть x, y и z – положительные числа такие, что $xyz \geq 1$. Докажите, что

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0 .$$

(Корея)

4. Последовательность $a_1, a_2 \ldots$ определена следующим образом:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Найдите все натуральные числа, которые взаимно просты с каждым членом этой последовательности.

(Польша)

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F – внутренние точки отрезков BC и AD соответственно такие, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке Q, прямые EF и AC

пересекаются в точке R. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех этих треугольников, имеют общую точку, отличную от P.

(Польша)

6. На математической олимпиаде участникам были предложены 6 задач. Оказалось, что каждая пара задач была решена более чем $\frac{2}{5}$ от общего числа участников, но никто не решил все 6 задач. Докажите, что найдутся по крайней мере два участника, каждый из которых решил ровно 5 задач.

(Румыния)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Запишем векторное равенство $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2A_1} = \vec{0}$. Заметим, что сумма векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, C_1C_2 равна $\vec{0}$, так как если последовательно отложить их от некоторой точки, получится равносторонний треугольник. Следовательно, сумма векторов $\overrightarrow{A_2B_1}$, $\overrightarrow{B_2C_1}$, $\overrightarrow{C_2A_1}$ равна $\vec{0}$. Если эти векторы последовательно отложить от некоторой точки, получится треугольник, причем равносторонний, так как длины векторов равны. Значит, прямые A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 образуют правильный треугольник, откуда легко вытекает подобие треугольников AC_1B_2, BA_1C_2 и CB_1A_2. Более того, эти треугольники равны, поскольку $A_2B_1 = B_2C_1 = C_2A_1$, и, значит, они совмещаются поворотом на угол 120° вокруг центра O треугольника ABC. Поскольку точки A_1, B_1, C_1 переходят друг в друга при повороте на 120° вокруг O, то треугольник $A_1B_1C_1$ – правильный и O – его центр. Так как $B_1A_1 = C_1A_1$ и $B_1B_2 = C_1B_2$, то A_1B_2 – серединный перпендикуляр к B_1C_1, поэтому A_1B_2 проходит через O. Аналогично, B_1C_2 и C_1A_2 проходят через O.

2 (А.Магазинов). Если для пары номеров $m < n$ выполнено $a_m = a_n$, то a_m и a_n дают равные остатки при делении на n – противоречие. Таким образом, в последовательности каждое целое число встречается не более одного раза.

Предположим, что целое число N не встретилось в последовательности. Так как среди членов последовательности бесконечно много положительных и отрицательных, то найдется такое t, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_t$ есть как большее N, так и меньшее N. Пусть X и Y – соответственно наименьшее и наибольшее среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_t$; $X < N < Y$. Среди $Y - X + 1$ целых чисел промежутка $[X;\ Y]$ есть не больше $Y - X$ членов последовательности, так как N не встречается в последовательности. Значит, среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{Y-X+1}$ найдется a_k, лежащее вне промежутка $[X;\ Y]$. Тогда либо $\left|a_k - X\right|$, либо $\left|a_k - Y\right|$ не меньше $Y - X + 1$. Пусть для определенности $s = \left|a_k - Y\right| \geq Y - X + 1$. Тогда среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ нашлись два числа (a_k и Y), дающие равные остатки при делении на s, что противоречит условию.

Замечание. Из решения легко следует, что для каждого n множество первых n членов последовательности является множеством n последовательных целых чисел.

3 (Ю.Борейко (Молдова), решение удостоено спецприза ММО). Заметим, что

$$\frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{1}{x^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \frac{\left(x^3 - 1\right)\left(y^2 + z^2\right)}{x^3\left(x^5 + y^2 + z^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)},$$

поэтому

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{x^5 - x^2}{x^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \frac{x^2\left(x^3 - 1\right)^2\left(y^2 + z^2\right)}{x^3\left(x^5 + y^2 + z^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} \geq 0.$$

Значит,

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq$$

$$\geq \frac{x^5 - x^2}{x^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} + \frac{y^5 - y^2}{y^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} + \frac{z^5 - z^2}{z^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\left(x^2 - \frac{1}{x} + y^2 - \frac{1}{y} + z^2 - \frac{1}{z}\right).$$

Но так как $\frac{1}{x} \leq yz$, $\frac{1}{y} \leq zx$, $\frac{1}{z} \leq xy$, то

$$x^2 - \frac{1}{x} + y^2 - \frac{1}{y} + z^2 - \frac{1}{z} \geq x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx =$$

$$= \frac{1}{2}\left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right) \geq 0.$$

4 (Н.Калинин). *Ответ*: 1.

Достаточно показать, что для любого простого числа p найдется такой номер n, что a_n делится на p.

При $p = 2$ положим $n = 1$: $a_1 = 10$ – делится на 2; при $p = 3$ положим $n = 2$: $a_2 = 48$ – делится на 3. При $p > 3$ возьмем $n = p - 2$. Согласно малой теореме Ферма, если натуральное a не делится на p, то a^{p-1} дает остаток 1 при делении на p. Поэтому $6a_n = 6\left(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1\right) = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$ дает остаток $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 - 6 = 0$ при делении на p. Итак, $6a_n$ делится на p, откуда a_n делится на p, так как p и 6 взаимно просты.

5 (А.Катышев). Допустим, что прямые AD и BC пересекаются в точке H; положим, для определенности, что H лежит на лучах DA и CB (рис.1). Пусть K – середина дуги описанной окружности треугольника BHD, не содержащей точку H; очевидно, $BK = DK$ (рис. 2). Четырехугольник $BHDK$ вписанный, поэтому $\angle KDA = \angle KBC$. Треугольники KDA и KBC равны по двум сторонам и углу между ними ($DA = BC$ по условию), поэтому $KA = KC$, $\angle AKD = \angle CKB$. Отсюда $\angle AKC = \angle AKB + \angle CKB = \angle AKB + \angle AKD = \angle BKD$.

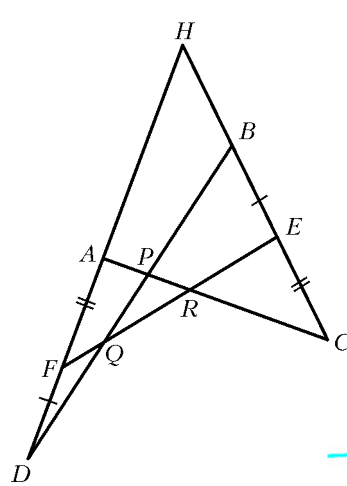


Рис. 1

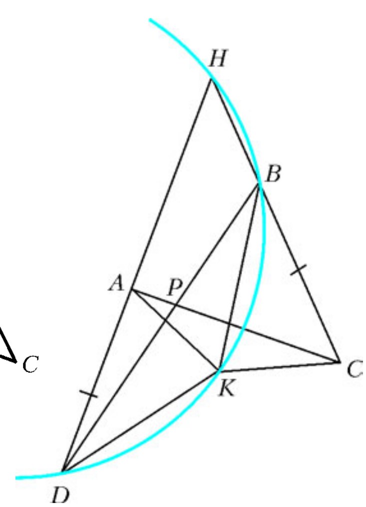


Рис. 2

В равнобедренных треугольниках AKC и BKD углы при вершинах равны, следовательно, и углы при основаниях равны, значит, $\angle KAP = \angle KDP$, и точки A, D, P, K лежат на одной окружности, откуда $\angle(KP, AP) = \angle(KD, AD)$. (Через $\angle(a, b)$ обозначен угол от прямой a до прямой b, отсчитываемый против часовой стрелки.)

Предыдущие рассуждения останутся без изменений, если точки A, C, P заменить на F, E, Q соответственно. Отсюда вытекает, что точки F, D, Q, K лежат на одной окружности и $\angle(KQ, FQ) = \angle(KD, FD)$. Получаем, что $\angle(KP, RP) = \angle(KP, AP) = \angle(KD, AD) = \angle(KD, FD) = \angle(KQ, FQ) = \angle(KQ, RQ)$, поэтому точки K, P, R, Q лежат на одной окружности. Итак, K – общая точка всевозможных окружностей, проходящих через точки P, Q, R.

Замечание 1. Из решения вытекает следующее описание искомой точки: точка K – центр поворота, переводящего точки A, F, D в точки C, E, B соответственно.

Замечание 2. Известно следующее утверждение. Пусть имеется четверка попарно непараллельных прямых. Тогда четыре окружности, описанные около треугольников, образованных тройками этих прямых, имеют общую точку. Эта точка называется точкой Микеля четверки прямых. Из решения следует, что K является точкой Микеля пяти прямых AD, BC, AC, BD, EF, т.е. лежит на описанной окружности треугольника, образованного любой тройкой из этих прямых.

6 (П.Козлов). Занумеруем всех участников олимпиады числами от 1 до n и представим результаты олимпиады в виде таблицы с n строками и шестью столбцами, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит плюс, если i-й участник решил задачу номер j. По условию, нет строки с шестью плюсами. Для каждой из пар (j, k) столбцов, $1 \le j < k \le 6$, определим параметр $b_{j,k}$, равный количеству строк, на пересечении которых с j-м и k-м столбцами стоят плюсы. По условию, $b_{j,k} > \frac{2}{5}n$, поэтому $b_{j,k} = \frac{2}{5}n + 1 - \left\{\frac{2}{5}n\right\} + a_{j,k}$, где $a_{j,k}$ – целое неотрицательное ($\{x\}$ обозначает дробную долю числа x). Предположим, утверждение задачи неверно, т.е. строк с пятью плюсами не более одной. Добавим, если возможно, в каждой строке плюсов так, чтобы в одной строке стало 5 плюсов (пусть, скажем, в этой строке нет плюса только в столбце номер q), а в остальных $n - 1$ строках – по 4 плюса. При этом условие задачи не нарушится.

Сосчитаем теперь количество P пар плюсов, находящихся в каждой строке. Суммируя по строкам, получаем $P = 6(n-1) + 10 = 6n + 4$, так как в строке с четырьмя плюсами 6 пар плюсов, а в строке с пятью плюсами – 10 пар. Суммируя по всем парам столбцов, получаем, что

$$P = b_{1,2} + b_{1,3} + \ldots + b_{5,6} =$$

$$= 15\left(\frac{2}{5}n + 1 - \left\{\frac{2}{5}n\right\}\right) + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6} =$$

$$= 6n + 15 - 15\left\{\frac{2}{5}n\right\} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6}.$$

Дробная доля $\left\{\frac{2}{5}n\right\}$ может принимать значения 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$. Если $\left\{\frac{2}{5}n\right\} \le \frac{3}{5}$, то $P \ge 6n + 15 - 15 \cdot \frac{3}{5} = 6n + 6 > 6n + 4 = P$ – противоречие. Если же $\left\{\frac{2}{5}n\right\} = \frac{4}{5}$, то n дает остаток 2 при делении на 5. Положим $n = 5l + 2$, тогда

$$P = 6n + 15 - 15 \cdot \frac{4}{5} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6} =$$

$$= 6n + 3 + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6} = 6n + 4.$$

Значит, ровно одно из 15 чисел $a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{5,6}$ равно 1, а остальные равны 0. Пусть для определенности $a_{1,2} = 1$, тогда $b_{1,2} = \frac{2}{5}n + 1 - \frac{4}{5} + 1 = 2l + 2$, а $b_{1,3} = b_{1,4} = \ldots = b_{5,6} = 2l + 1$. Пусть в i-м столбце s_i плюсов. Обозначим t_i количество пар плюсов, находящихся в одной строке, для которых один из плюсов содержится в i-м столбце. С одной стороны, t_i есть сумма тех пяти чисел $b_{j,k}$, для которых $i = j$ или $i = k$, т.е. $t_i = 5(2l+1) = 10l + 5$ при $i \ne 1, 2$ и $t_1 = t_2 = 10l + 6$. С другой стороны, суммируем t_i по строкам: каждая из s_i строк, имеющих плюс в i-м столбце, содержит 3 нужные пары, если всего в этой строке 4 плюса, и содержит 4 нужные пары, если всего в этой строке 5 плюсов. Таким образом, $t_q = 3s_q$ и $t_i = 3s_i + 1$ при $i \ne q$.

Итак, с одной стороны, среди чисел $t_1, t_2, \ldots, t_6$ два числа равны, а оставшиеся четыре числа на 1 меньше. С другой стороны, ровно одно из этих чисел делится на 3. Противоречие.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терешин

XXXVI Международная физическая олимпиада

В первой половине июля 2005 года в Испании, в городе Саламанка, расположенном в 200 км от Мадрида, прошла очередная международная физическая олимпиада школьников. Саламанка была выбрана не случайно – здесь расположен один из старейших университетов Европы, основанный в 1218 году. В нем ежегодно десятки тысяч студентов обучаются разным наукам и проходят стажировки. Саламанка – один из центров образования, науки и культуры Испании.

На олимпиаду прибыли команды школьников из 73 стран. Общее число участников олимпиады составило 352 школьника.

В сборную России, по результатам выступления на двух последних всероссийских олимпиадах и рейтинга, полученного на трех сборах, были включены:

Гущин Иван – Ярославль, школа 33 (школьный учитель физики – Э.Е.Федосеева, преподаватель Регионального научно-образовательного центра «Логос» – С.В.Турунтаев), *Ахунзянов Руслан* – Набережные Челны, гимназия 57 (учитель физики – Р.Х.Ахунзянов),

Мозгунов Евгений – Сергиев Посад, ФМЛ (учителя – А.В.Русаков, В.В.Дмитриева),

Федотов Юрий – Тамбов, лицей 14 (учитель – Ю.Н.Комаров),

Ерофеев Иван – Новосибирск, лицей 130 (учителя – Ю.В.Трибунская, М.П.Вышенкова).

Команду России возглавили профессор МФТИ С.М. Козел и доцент МФТИ В.П. Слободянин. В качестве наблюдателей от России (прибывших на олимпиаду за свой счет) присутствовали доцент МФТИ Д.А.Александров и директор ФМЛ города Сергиев Посад, учитель физики В.Г.Сухов.

Как и в предыдущие годы, подготовка сборной команды школьников России проводилась на базе Московского физико-технического института.

На олимпиаде состязающимся были предложены три теоретических задания, каждое из которых оценивалось в 10 баллов, и одно экспериментальное задание – 20 баллов. Таким образом, максимальное число баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, составляло 50. Как теоретические, так и экспериментальное задания были достаточно трудными и громоздкими.

Наши ребята хорошо справились с заданиями обоих туров. По теории они набрали в сумме 138,4 балла (более 92% от максимально возможного), по эксперименту – 89,9 балла (около 90%). Несмотря на столь высокие результаты, наша команда в неофициальном командном зачете по сумме баллов заняла только 3-е место.

Вот результаты выступления на олимпиаде двенадцати лучших команд:

№	Страна	Золотая медаль	Серебряная медаль	Бронзовая медаль	Сумма баллов
1.	Тайвань	5			238,7
2.	Китай	5			234,2
3.	Россия	4	1		228,3
4.	Румыния	3	2		223,6
5.	Таиланд	2	2	1	220,4
6.	Иран	2	1	2	215,8
7.	Венгрия	3	2		215,6
8.	Индия	2	2	1	215,3
9.	Сингапур	3	2		212,6
10.	США	1	3	1	209,4
11.	Корея	2	3		204,2
12.	Индонезия	2	3		201,8

Как видно из таблицы, из европейских стран в группе лидеров остались только Россия, Румыния и Венгрия, ежегодно показывающие высокие результаты, а 8 стран из указанных 12 – это страны юго-восточного региона. Команды большинства из этих стран устойчиво добиваются высоких результатов в международных олимпиадах и по другим предметам. Это может означать лишь одно: в этих странах уделяется значительное внимание образованию и, в частности, работе с одаренными детьми – интеллектуальному потенциалу нации.

Заметим, что конкуренция между командами лидирующей группы была исключительно острой. В этих условиях решающим фактором в борьбе за более высокое место часто становится аккуратная запись результатов, указание размерностей физических величин, правильно выбранный масштаб графиков, четко выполненный рисунок или схема, грамотно оцененная ошибка измерений и так далее. Наблюдения за многолетний период показывают, что в нашей средней школе исчез процесс приобретения такой «образовательной культуры».

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

	Теория (30 баллов)	Эксперимент (20 баллов)	Сумма баллов	Медаль
Ахунзянов Руслан	29,8	19,0	48,8	золотая
Мозгунов Евгений	29,3	18,6	47,9	золотая
Гущин Иван	26,0	19,1	45,1	золотая
Ерофеев Иван	30,0	15,0	45,0	золотая
Федотов Юрий	23,3	18,2	41,5	серебряная

Участник нашей команды Иван Ерофеев выполнил теоретические задания на 100% и получил специальный приз жюри за абсолютно лучший результат по теории.

Условия теоретических задач приведены ниже. Здесь же кратко расскажем об экспериментальном задании, в котором участникам предлагалось выполнить серию экспериментов и определить важнейшую физическую константу – постоянную Планка. На выполнение эксперимента отводилось 5 часов. Каждому участнику был предоставлен прибор оригинальной конструкции, включающий источник света, фотоприемник, систему оптических фильтров, электроизмерительные приборы для измерения температуры, напряжения и силы тока, регулируемый блок питания. К заданию прилагались краткие инструкции к пользованию всеми элементами установки и подробное описание всех разделов экспериментальной работы. Таким образом, ребята с самого начала знали логическую схему работы, и в этом смысле в предложенном эксперименте отсутствовал какой-либо творческий элемент. Успех выполнения задания зависел от аккуратности проведения длинной серии нескольких экспериментов, тщательной обработки экспериментальных результатов, аккуратной записи результатов и построения графиков в правильно выбранных координатах, определения из этих графиков нужных параметров и оценки точности различных этапов эксперимента. Если принять во внимание, что многие из кандидатов в сборную России на начальном этапе подготовки вообще не имели никаких экспериментальных навыков и знакомились с методикой проведения физического эксперимента и с целым рядом современных приборов только на краткосрочных сборах, то результаты наших ребят в экспериментальном туре можно признать вполне успешными.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Спутник с печальной судьбой

Наиболее частыми маневрами, выполняемыми космическими кораблями на орбите, являются изменения скорости вдоль направления полета с целью перехода на более высокие орбиты или торможения при входе в атмосферу. В данной задаче мы будем изучать изменения орбит, когда тяга двигателя действует в радиальном направлении. Для проведения численных расчетов используйте следующие данные: радиус Земли $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения у земной поверхности $g = 9,81$ м/с^2, продолжительность астрономических суток $T_0 = 24,0$ ч.

Мы рассматриваем геостационарный спутник связи (его период обращения равен T_0) массой m, выведенный на круговую экваториальную орбиту радиусом r_0. Такие спутники оснащены маневровым двигателем, с помощью которого им сообщаются импульсы, необходимые для выхода на конечную орбиту.

Задание 1

1) Найдите численное значение r_0. (0,3 балла)

2) Получите аналитическое выражение для скорости v_0 спутника как функцию g, R и r_0, а также найдите численное

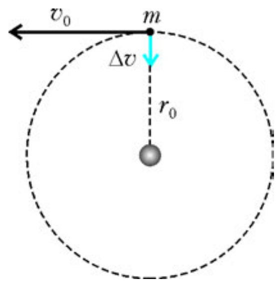


Рис. 1

значение скорости. (0,3 + 0,1 б.)

3) Выразите момент импульса L_0 и полную механическую энергию E_0 спутника как функцию v_0, m, g и R. (0,4 + 0,4 б.)

После того как спутник уже достиг геостационарной круговой орбиты и был застабилизирован в нужном положении, готовясь к выполнению своей работы, из-за ошибки наземных операторов вновь включился маневровый двигатель (рис.1). В результате спутник получил толчок, направленный к Земле, и, несмотря на быстрые действия наземной команды по остановке двигателя, нежелательное изменение скорости спутника Δv все-таки произошло. Мы охарактеризуем этот толчок параметром $\beta = \Delta v / v_0$. Время работы двигателя обычно пренебрежимо мало по сравнению со всеми другими орбитальными временами, поэтому мы можем рассматривать его как бесконечно малое.

Задание 2

Рассмотрим случай $\beta < 1$.

1) Выразите фокальный параметр (см. Подсказку) новой орбиты l и ее эксцентриситет ε через r_0 и β. (0,4 + 0,5 б.)

2) Вычислите угол α между большой осью новой орбиты и радиусом-вектором спутника в месте толчка. (1 б.)

3) Получите аналитические выражения для минимального $r_{\min}$ (перигей) и максимального $r_{\max}$ (апогей) расстояний спутника от центра Земли как функции r_0 и β и вычислите их численные значения для $\beta = 1/4$. (1,0+0,2 б.)

4) Выразите период обращения по новой орбите T как функцию T_0 и β и найдите его численное значение для $\beta = 1/4$. (0,5+0,2 б.)

Задание 3

1) Вычислите $\beta_{\min}$ – минимальное значение параметра β, необходимое для преодоления спутником земной гравитации. (0,5 б.)

2) Определите в этом случае наименьшее расстояние $r'_{\min}$ между центром Земли и спутником при его движении по новой траектории как функцию r_0. (1 б.)

Задание 4

Рассмотрим случай $\beta > \beta_{\min}$.

1) Определите скорость спутника на бесконечности v_∞ как функцию v_0 и β. (1 б.)

2) Выразите прицельный параметр b (рис.2) в асимптотическом пределе через r_0 и β. (1 б.)

3) Определите угол φ асимптотического направления ухода как функцию β. Найдите его численное значение для $\beta = 3\beta_{\min}/2$. (1 + 0,2 б.)

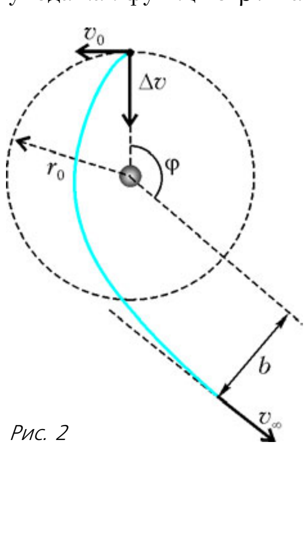


Рис. 2

Подсказка

Под действием центральных сил, подчиняющихся закону обратных квадратов, тела движутся по траекториям, которые являются эллипсами, параболами или гиперболами. В приближении $m \ll M$ притягивающая масса M находится в одном из фокусов. При выборе начала координат в этом фокусе (рис.3) общее уравнение этих кривых в полярных координатах записывается в виде

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon\cos\theta},$$

где l – положительная постоянная, называемая фокальным параметром, а ε – эксцентриситет кривой. Используя константы движения, можно записать

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}},$$

где G – гравитационная постоянная, L – модуль момента импульса относительно начала координат тела, движущегося по орбите, а E – его механическая энергия, причем потенциальная энергия на бесконечности принимается равной нулю.

Возможны следующие случаи: если $0 \le \varepsilon < 1$, то кривая является эллипсом (при $\varepsilon = 0$ – окружностью); если $\varepsilon = 1$, то кривая является параболой; если $\varepsilon > 1$, то кривая является гиперболой.

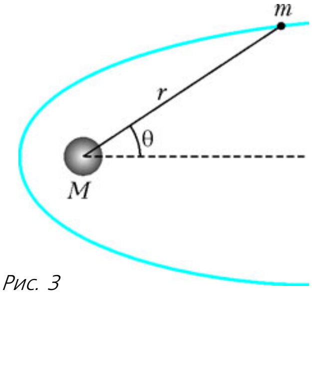


Рис. 3

Задача 2. Абсолютные измерения электрических величин

Преобразования в науке и технике, произошедшие в XIX столетии, привели к острой потребности во всемирно признанных стандартах электрических величин. Считалось, что новые абсолютные единицы должны основываться только на эталонах длины, массы и времени. С 1861 по 1912 год была проведена интенсивная экспериментальная работа по нахождению значений этих единиц. Мы предлагаем здесь три исследования этой проблемы.

Определение ома по Кельвину

Круговая короткозамкнутая плоская катушка из N витков радиусом a и общим сопротивлением R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального диаметра в горизонтальном магнитном поле $\vec{B}_0 = B_0\vec{i}$.

1) Подсчитайте электродвижущую силу $\mathscr{E}$, индуцированную в катушке, а также среднюю мощность $\langle P \rangle$, необходимую для поддержания движения катушки. Самоиндукцией катушки пренебречь. (0,5 + 1 б.)

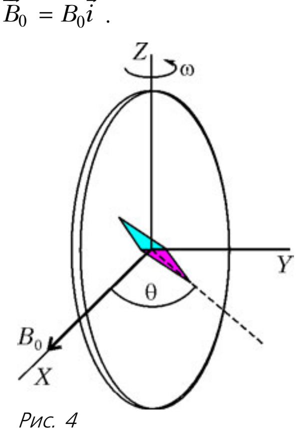


Рис. 4

Маленькая магнитная стрелка помещена в центр катушки, как показано на рисунке 4. Она может медленно вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси Z, но не может поспевать за быстрым вращением катушки. Как только будет достигнут стационарный режим, стрелка установится в положении, составляющем малый угол θ с $\vec{B}_0$.

2) Выразите сопротивление R катушки через угол θ и другие заданные параметры системы. (2 б.)

Лорд Кельвин применил этот метод в 1860-х годах для установления абсолютного стандарта для ома. Чтобы избавиться от вращающейся катушки, Лоренц применил использованный ранее лордом Рэлеем и мисс Зидгвик альтернативный метод, который исследуется в следующей части задачи.

Определение ома по Рэлею и Зидгвик

Экспериментальная установка, изображенная на рисунке 5, состоит из двух одинаковых металлических дисков D и D'

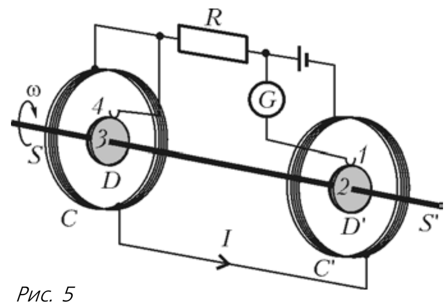


Рис. 5

радиусом b, насаженных на (проводящий) вал SS'. Мотор вращает вал с угловой скоростью ω, которая может изменяться. Две одинаковые катушки C и C' (радиусом a и с N витками каждая) окружают диски. Они соединены таким образом, что электрический ток I течет через них в противоположных направлениях. Прибор служит для измерения сопротивления R.

1) Допустим, что ток I, протекающий через катушки C и C', создает однородное магнитное поле вокруг D и D', величину которого можно принять равной полю в центре катушек. Найдите электродвижущую силу $\mathcal{E}$, индуцированную между краями дисков *1* и *4*, предполагая, что расстояние между катушками значительно превышает радиус катушек и что $a \geq b$. (2 б.)

Пусть теперь диски подсоединены к электрической цепи щеточными контактами, касающимися краев дисков *1* и *4*. Гальванометр G регистрирует силу тока, протекающего по цепи *1–2–3–4*. Сопротивление R измеряется, когда гальванометр G показывает ноль.

2) Выразите сопротивление R через физические параметры системы. (0,5 б.)

Определение ампера

Пропускание тока по двум проводникам и измерение силы, действующей между ними, позволяет получить абсолютное определение силы тока. Принцип действия «токовых весов», изобретенных лордом Кельвином в 1882 году, основан на этом методе. Весы состоят из шести одинаковых одиночных витков радиусом a, соединенных последовательно. Как показано на рисунке 6, неподвижные витки C_1, C_3, C_4 и C_6 расположены в двух горизонтальных плоскостях, которые разделены малым расстоянием $2h$. Катушки C_2 и C_5 подвешены к плечам весов длиной d и в состоянии равновесия находятся на одинаковых расстояниях от обеих плоскостей.

Ток I течет через различные катушки в таких направлениях, что сила со стороны магнитного поля, действующая на C_2, направлена вверх, в то время как сила, действующая на C_5, направлена вниз. Чтобы восстановить равновесие весов при протекании тока через цепь, требуется расположить массу m на расстоянии x от точки опоры O.

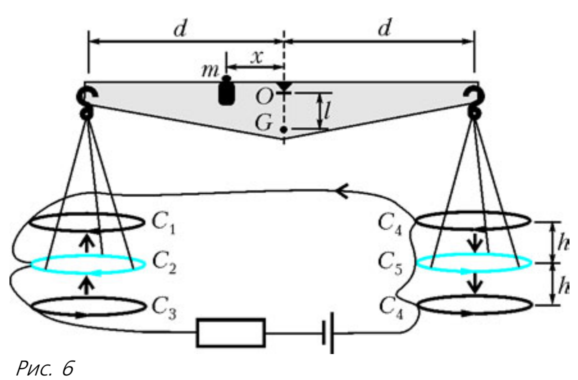


Рис. 6

1) Найдите силу F, действующую на C_2 благодаря магнитному взаимодействию с C_1. Для простоты считайте, что сила на единицу длины такая же, как при взаимодействии двух длинных линейных проводников, по которым текут параллельные токи. (1 б.)

2) Сила тока измеряется, когда весы находятся в равновесии. Выразите ее значение I через физические параметры системы, предполагая, что размеры установки таковы, что можно пренебречь действием левых катушек на правые и наоборот. (1 б.)

Пусть M – масса всей подвешенной системы (за исключением m), G – ее центр масс, а l – расстояние OG.

3) Равновесие весов оказывается устойчивым по отношению к малым отклонениям δz и $-\delta z$ витков C_2 и C_5 по высоте. Найдите максимальное значение $\delta z_{\max}$, при котором весы все еще возвращаются в положение равновесия, когда их отпускают. (2 б.)

Задача 3. Нейтроны в гравитационном поле

В знакомом нам мире классической физики идеально упругий мячик, прыгающий на поверхности земли, представляет собой пример системы, бесконечно совершающей периодическое движение. Мячик находится в ловушке: он не может опускаться ниже поверхности земли и подниматься выше некоторой максимальной высоты. Движение мячика в этом состоянии будет вечно оставаться ограниченным: он будет то падать вниз, то снова подпрыгивать вверх. Только сопротивление воздуха или неупругие отражения могли бы изменить характер этого процесса, но в дальнейшем мы ими будем пренебрегать.

Группа физиков из Института Лауэ – Ланжевена в Гренобле в 2002 году сообщила об одном эксперименте, касающемся поведения нейтронов в гравитационном поле Земли. В этом эксперименте нейтроны, движущиеся горизонтально, могли падать на горизонтальную кристаллическую поверхность, служащую нейтронным зеркалом, от которой они могли снова и снова упруго отскакивать и подниматься на первоначальную высоту.

Экспериментальная установка, изображенная на рисунке 7, содержит щель *Щ*, нейтронное зеркало *З* на высоте $z = 0$, поглотитель нейтронов *П* длиной L на высоте $z = H$ и детектор нейтронов *Д*. Пучок нейтронов летит с постоянной горизонтальной составляющей скорости v_x от *Щ* к *Д* сквозь зазор между поверхностями *П* и *З*. Все нейтроны, которые достигают поверхности *П*, поглощаются ею и выбывают из эксперимента. Нейтроны, достигающие поверхности *З*, упруго отражаются. Детектор *Д* определяет коэффициент про-

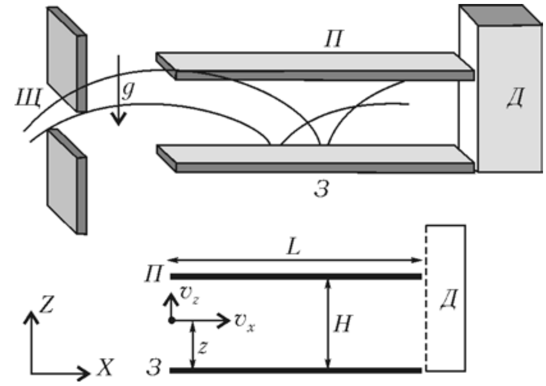


Рис. 7

хождения $N(H)$, т.е. общее число нейтронов, достигших $Д$ за единицу времени.

Нейтроны попадают в зазор, имея широкий спектр положительных и отрицательных значений вертикальной составляющей скорости v_z. Оказавшись в зазоре, они летят между зеркалом и поглотителем, которые ограничивают их движение снизу и сверху соответственно.

1) В рамках классической модели определите диапазон вертикальных составляющих скорости $v_z(z)$ нейтронов, которые, влетая в зазор на высоте z, могут достичь детектора $Д$. Предполагается, что L намного больше любой другой характерной длины в задаче. (1,5 б.)

2) В рамках классической модели определите минимальную величину $L_{\min}$, обеспечивающую поглощение поверхностью $П$ всех нейтронов, у которых вертикальные составляющие скорости для каждого значения z лежат вне указанного выше диапазона. Положите $v_x = 10$ м/с и H = 50 мкм. (1,5 б.)

Коэффициент прохождения нейтронов $N(H)$ измеряют детектором $Д$. Следует ожидать, что $N(H)$ монотонно возрастает с увеличением H.

3) В рамках классической модели определите коэффициент прохождения $N_{\text{кл}}(H)$, полагая, что нейтроны попадают в зазор с вертикальной составляющей скорости v_z на высоте z, причем все значения v_z и z равновероятны. Ответ запишите в предположении, что число нейтронов, влетающих в зазор за единицу времени в единичном интервале вертикальной скорости v_z и в единичном интервале значений z, остается постоянным и равным ρ. (2,5 б.)

Экспериментальные результаты, полученные Гренобльской группой, расходятся с рассмотренными выше классическими предсказаниями. Они показывают, что значение $N(H)$ испытывает резкие скачки, когда H проходит некоторые критические высоты H_1, H_2 … (рис.8). Другими словами, эксперимент показывает, что вертикальное движение нейтронов, многократно отражающихся от зеркала, квантуется. На языке, который Бор и Зоммерфельд использовали для расчета энергетических уровней атома водорода, это звучит примерно так: действие S этих нейтронов вдоль вертикального направления является величиной, кратной постоянной Планка h. Здесь S задается правилом квантования Бора – Зоммерфельда:

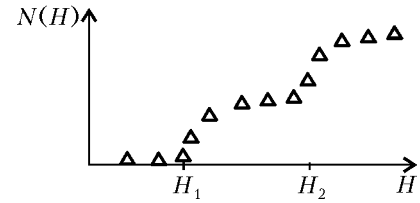


Рис. 8

$$S = \int p_z dz = nh, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где p_z – вертикальная составляющая импульса, а интеграл охватывает движение между двумя отражениями. Нейтроны только с такими значениями S могут находиться в зазоре.

4) Используя правило квантования Бора – Зоммерфельда, определите максимальные высоты подъема H_n и соответствующие им энергетические уровни E_n, связанные с вертикальным движением. Представьте численный результат для H_1 в мкм, а для E_1 – в эВ. (2 б.)

Изначально однородное на входе распределение нейтронов ρ изменяется во время полета сквозь длинный зазор, превращаясь в ступенчатое распределение, регистрируемое в $Д$ (см. рис.8). С этого момента для простоты рассматривается случай длинного зазора с $H < H_2$. В рамках классической модели все нейтроны с энергиями в интервале, рассмотренном в пункте 1, могли пройти сквозь такой зазор. В рамках квантово-механической модели это могут сделать только нейтроны с энергией E_1. Согласно принципу неопределенности Гейзенберга для энергии и времени, это перераспределение требует некоторого минимального времени полета. Неопределенность энергии вертикального движения будет существенной, если длина полости мала. Это явление приводит к уширению энергетических уровней.

5) Оцените минимальное время полета $t_{\min}$ и минимальную длину $L_{\min}$ полости, необходимые для наблюдения первого скачка числа регистрируемых детектором нейтронов. Положите v_x = 10 м/с. (2 б.)

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Слободянин

Московская городская олимпиада студентов по физике

25 мая 2005 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел московский региональный тур Всероссийской олимпиады по физике среди студентов технических вузов. К участию в олимпиаде были приглашены все ведущие технические вузы Москвы. Состав каждой команды – 10 студентов до 3 курса включительно. Командный зачет проводился по 5 лучшим результатам членов команды.

Участникам олимпиады был предложен вариант из 9 задач (в зависимости от сложности, задачи оценивались от 5 до 10 баллов) и разрешалось пользоваться любой литературой.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (89 баллов), второе место – команда Московского государственного института стали и сплавов (МИСиС) (73 б.), третье место – команда Московского авиационного института (МАИ) (44 б.).

В личном зачете первое место завоевал А.Майстров (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 25 б.), второе место – А.Бурцев (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 23 б.), третье место – Т.Галимзянов (МИСиС, 22 б.).

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Точка движется прямолинейно с постоянной скоростью v. Другая точка, скорость которой постоянна по модулю и равна $u > v$, догоняет первую таким образом, что в любой момент времени угол между вектором скорости второй точки и линией, соединяющей обе точки, равен φ и направлен на опережение движения первой точки. В начальный момент времени вторая точка находится на перпендикуляре к траектории первой точки на расстоянии L от нее. Определите отрезок времени τ, через который точки встретятся.

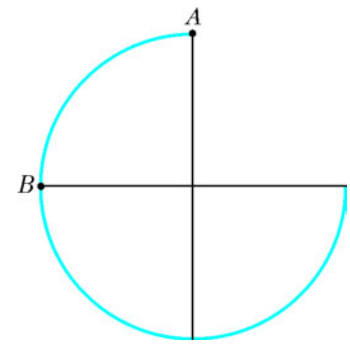
2. Мотоциклист, имея нулевую начальную скорость, разгоняется с максимально возможным ускорением по окружности радиусом R. Ускорение ограничивается коэффициентом трения между шинами и дорогой, равным μ. Определите расстояние, которое пройдет мотоциклист, разогнавшись до скорости, равной половине максимальной.

3. Вокруг массивной планеты массой M по стационарной круговой орбите радиусом R движется астероид массой m со скоростью v. В начальный момент времени на этой же орбите с такой же скоростью движется точно такой же еще один астероид, и расстояние между астероидами равно l ($R \gg l \gg Rm/M$). Определите расстояние между астероидами, когда они за счет сил гравитационного взаимодействия окажутся на одной прямой, проходящей через центр планеты.

4. Обруч радиусом R и массой m висит на гвозде, причем трение между гвоздем и обручем отсутствует. Определите период малых колебаний обруча.

5. В идеальной газовой тепловой машине Карно объем одного киломоля трехатомного газа за цикл изменяется в 8 раз. Определите максимальную работу, которую может совершить данная машина за цикл, если все процессы обратимы, а температура холодильника постоянна и равна $T_{\text{х}}$. Известно также, что $\exp(0,315) = 2(1 - 0,315)$.

6. Сфера радиусом R заряжена равномерно по поверхности с поверхностной плотностью σ и разделена на четыре одинаковые доли. Если одну долю удалить, то потенциал точки A (см. рисунок) будет равен φ_0. Определите работу, которую необходимо совершить над зарядом q, чтобы перенести его из точки A в точку B.



7. Длинная тонкая шина шириной a с током I сложена гармошкой N раз. Расстояние между соседними слоями $d \ll a$. Определите индукцию магнитного поля между слоями 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 и так далее.

8. Токи в двух кольцах из сверхпроводника, удаленных на большое расстояние друг от друга, равны I_1 и I_2 соответственно. Определите, каким будет ток во втором кольце, если в результате сближения колец ток в первом кольце стал равен I_3, а индуктивности колец известны и равны L_1 и L_2 соответственно.

9. Свет с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает на узкую щель, ширина которой равна диаметру первой зоны Френеля для точки наблюдения. Если первая зона Френеля закрыта стеклянной пластинкой с показателем преломления n и толщиной d, то интенсивность света в точке наблюдения максимальна и равна I_1. Определите интенсивность света в точке наблюдения, когда открыта вся щель.

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. По условию,

$$(10 \cdot \text{А} + \text{Х})(10 \cdot \text{Э} + \text{Х}) = (10 \cdot \text{Х} + \text{Э})(10 \cdot \text{Х} + \text{А}).$$

Раскрыв скобки, получим

$$100 \cdot \text{А} \cdot \text{Э} + 10 \cdot \text{Х} \cdot \text{Э} + 10 \cdot \text{А} \cdot \text{Х} + \text{Х}^2 = 100 \cdot \text{Х}^2 + 10 \cdot \text{Х} \cdot \text{Э} + 10 \cdot \text{А} \cdot \text{Х} + \text{А} \cdot \text{Э},$$

или, после упрощения, $99 \cdot \text{А} \cdot \text{Э} = 99 \cdot \text{Х}^2$. Разделив обе части равенства на $99 \cdot \text{Х} \cdot \text{Э}$, получим требуемое.

2. За 6 часов с момента начала боя часовая стрелка пройдет половину циферблата и окажется между 16 и 17 часами, а минутная обойдет циферблат 6 раз, поэтому угол между стрелками изменится на $180°$, и они совпадут. Но между 16 и 17 часами часовая и минутная стрелки не могут совпасть дважды. Значит, это и есть момент окончания боя, и бой длился ровно 6 часов.

3. Заметим, что $2^2 + 3^3 + 1^4 = 2^5$. Пользуясь тем, что сумма двух одинаковых степеней двойки равна следующей степени: $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, из предыдущего равенства последовательно будем получать

$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 = 2^6,$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7,$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 2^8,$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 = 2^9,$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^{10}.$$

Значит, можно взять такие числа, удовлетворяющие условию задачи:

$$p = 2, \quad q = 3, \quad r = 1, \quad s = t = u = v = w = x = 2.$$

4. Нет. Возьмем, например, два равнобедренных треугольника со сторонами 4, 4, 2 и 5, 3, 3. Они удовлетворяют условию задачи, потому что 4 + 4 = 5 + 3 и 4 + 2 = 3 + 3.

5. Чудак прав. Если бы, например, в роще было меньше 100 дубов, то *не дубов* оказалось бы больше 200, что противоречит условию.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» № 5 за 2005 г.)

6. Можно.

7. Да, можно. Пусть наибольший общий делитель (НОД) числителя и знаменателя дроби $\dfrac{A+2B}{A-2B}$ равен $d > 1$. Тогда $d = \text{НОД}\left((A+2B)-(A-2B);\ A-2B\right) = \text{НОД}(4B;\ A-2B)$. Если d нечетно, то d – делитель числа B, а следовательно, и числа A. Если d четно, то A – четное число. В этом случае проведем такие же рассуждения для второй дроби. В итоге получим, что либо числа A и B не взаимно просты, либо B – четно. Но если A и B четные, то дробь $\dfrac{A}{B}$ – сократима.

8. Распрямим траекторию луча, представив, что он проходит сквозь стенки квадрата и идет по прямой SF (рис.1). Для этого отразим исходный квадрат симметрично относительно его стенок достаточное число раз, тогда S – начальный, а F – конечный узел квадратной сет-

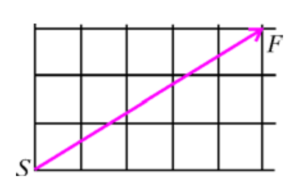


Рис. 1

ки. Если m и n – числа отражений луча от вертикальных и горизонтальных стенок исходного квадрата соответственно, то $SF = \sqrt{(m+1)^2 + (n+1)^2}$.
Найдем наименьшее значение величины $y = (m+1)^2 + (n+1)^2$, учитывая, что $m + n = 2005$, где m и n – натуральные числа.
Подставив $n = 2005 - m$ в правую часть нашего равенства и выделив в нем полный квадрат, получим

$$y = 2\left(m - \frac{2005}{2}\right)^2 - \frac{2005^2}{2} + 2006^2 + 1.$$

Значение y наименьшее, когда $m = 1002$ или $m = 1003$ и, соответственно, когда $n = 1003$ или $n = 1002$. Числа $m + 1$ и $n + 1$ должны быть взаимно простыми, чтобы луч света не попал на узел сетки раньше, чем через заданное число отражений (пересечений линий сетки). В нашем случае числа 1003 и 1004 взаимно простые, поэтому на траектории луча между точками S и F нет других узлов квадратной сетки.
Итак, наименьшее расстояние, которое может пройти луч, равно $\sqrt{(1002+1)^2 + (1003+1)^2} = \sqrt{2014025}$.

9. Такое можно сделать для всех n. Покажем, как именно.
Сначала рассмотрим случай четного n: пусть $n = 2m$, где m – натуральное. Мысленно подготовим места для чисел и пронумеруем их слева направо номерами от 1 до $2m$. А теперь расставим на эти места числа от 1 до $2m$ по следующим правилам:

- числа от 1 до m расставим в возрастающем порядке слева направо на места с *четными* номерами, начиная с номера 2;
- числа от $m + 1$ до $2m$ расставим в возрастающем порядке слева направо на места с *нечетными* номерами, начиная с номера 1.

Таким образом, расстановка чисел имеет вид:

$$m + 1,\ 1,\ m + 2,\ 2,\ m + 3,\ 3,\ \ldots,\ m + k,\ k,\ \ldots,\ 2m,\ m$$

(например, для $n = 10$ она такова: 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5).
Убедитесь, что полученная расстановка чисел действительно удовлетворяет условию.
Пусть теперь n – нечетное: $n = 2m + 1$. Сначала выпишем в строку числа от 1 до $2m$ так, как описано выше. Осталось «не пристроенное» число $2m + 1$. Запишем его справа от всех чисел. Таким образом, мы ничего не нарушим для тех чисел, которые были выписаны ранее. Поэтому единственное, что осталось, – проверить, что число $2m + 1$ делит сумму всех чисел, выписанных левее его. Но левее его выписаны *все остальные* числа, и их сумма, очевидно, равна $1 + 2 + \ldots + 2m = m \times (2m+1)$, т.е. и здесь требования условия соблюдаются.

10. а) Заметим, что весь комплект домино можно выложить в один ряд по кругу. Действительно, 21 кость (все, кроме 7 дублей) можно выложить, например, так:

01 12 23 34 45 56 60 02 24 46 61 13 35 50 03 36 62 25 51 14 40,

где левый и правый концы смыкаются. Оставшиеся 7 дублей вставляются в любые подходящие места. Ясно, что если из замкнутой круговой цепочки выкинуть одну любую кость, то оставшиеся окажутся выложенными в один ряд. Покажем, что из комплекта домино можно вынуть две кости так, что оставшиеся нельзя будет выложить в один ряд.
Пусть комплект костей домино выложили в один ряд. Будем говорить, что кость имеет две грани, каждая из которых может содержать от 0 до 6 очков. На стыке костей внутри ряда грани разбиваются на пары так, что без пары может оказаться самое большее две грани, расположенные на концах цепочки. Уберем кости 12 и 34. Поскольку каждая грань на костях полного комплекта встречается ровно 8 раз, то на оставшихся костях грани с 1, 2, 3 и 4 очками встретятся ровно 7 раз.
Если бы оставшиеся кости можно было выложить в один ряд, то крайние грани этого ряда содержали бы и 1, и 2, и 3, и 4 очка. Но это невозможно. Поэтому $n = 2$.

б) Пусть из комплекта домино убрали две кости. Если одна из них дубль, то его можно удалить из круговой цепочки, сохранив круг. Поэтому после удаления любой другой кости оставшиеся всегда можно будет выложить в один ряд.
Пусть теперь убрали кости ab и bc, среди которых нет дублей. Докажем, что оставшиеся всегда можно выложить в один ряд. Действительно, рассмотрим кость ab в исходной замкнутой круговой цепочке. Можно считать, что рядом с ней находится отличная от дубля кость bk, ибо дубль bb можно переложить в любое другое подходящее место (имеется два таких места).
Если $k = c$, т.е. убранные кости являются соседями в круговой цепочке, то оставшиеся уже выложены в один ряд. Если $k \neq c$, то в круговой цепочке заменим все грани k на грани c и наоборот. Ясно, что круговая цепочка сохранится, но в ней кости ab и bc будут соседями, после удаления которых оставшиеся кости будут выложены в один ряд.
Если убрали кости ab и cd, среди которых нет одинаковых граней, то, как доказывалось в пункте а), оставшиеся нельзя выложить в один ряд.
Итак, если из комплекта убрали кости ab и cd, среди которых есть одинаковые грани, то оставшиеся кости всегда можно выложить в один ряд, если же одинаковых граней нет, то оставшиеся кости нельзя выложить в один ряд. Оценим шансы каждого исхода. Найдем, сколькими способами можно выбрать пару костей, у которых нет одинаковых граней. Уберем дубли в сторону. Отличную от дубля кость ab можно выбрать 21 способом. После того как кость ab выбрана, среди 20 оставшихся костей 10 имеют с этой костью одинаковые грани. Поэтому кость cd, не имеющую с ab одинаковых граней, можно выбрать $20 - 10 = 10$ способами. Образовав $21 \times 10 = 210$ возможных комбинаций пар костей с различными гранями, замечаем, что ровно в половине рассматриваемых случаев пары не повторяются (из двух пар $(ab; cd)$ и $(cd; ab)$ оставляем только одну). Итого, возможно 105 различных способов.
Всего же из комплекта 28 костей домино пару костей можно выбрать $\frac{28 \cdot 27}{2} = 378$ различными способами. Поэтому оставшиеся кости можно будет выложить в один ряд в 273 случаях и нельзя – в 105 случаях.

ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1. $v_{4m} = \frac{2}{5}v_0$; $\tau = \pi\sqrt{\frac{4m}{5k}}$. **2.** $H = \frac{36}{5}s = 18$ см.
4. $E_k = 1{,}3$ МэВ.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ

Математика

Вариант 1

1. $[0; 1) \cup (1; 3)$. **2.** $(3; 0)$; $\left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right)$.
3. $[-8; -6) \cup (3; \sqrt{10})$. **4.** 40.
5. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi n$, 15; $\pi + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi n$, 11; $n \in \boldsymbol{Z}$.
6. Успеют.

Вариант 2

1. $y = 2x^2 - x + 3$.
2. $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
3. Первой хозяйке – 10 рублей, а второй – 70 рублей.
4. πn, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $(-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $n, k, m \in \boldsymbol{Z}$.
5. $\sin\angle ABC = \frac{3}{\sqrt{57}}$. **6.** $\frac{5}{4}$.

Физика

Вариант 1

1. $v_2 = v_1 + \frac{l}{t_0} = 72$ км/ч. **2.** $H = \frac{Mv^2}{2g(m+M)}$.

3. $A = \frac{(\varepsilon - 1)C\mathcal{E}^2}{2}$, $A_{ст} = (\varepsilon - 1)C\mathcal{E}^2$.

4. $\eta = \frac{V_в}{V_к} = \frac{М_к}{М_в} = 16$. **5.** $|F| = 2L = 6$ см.

Вариант 2

1. $\omega = \frac{2v}{D} = 10$ с$^{-1}$. **2.** $v_2' = \frac{k+1}{2}v_1$. **3.** $E = \frac{q}{Cd} = 2$ кВ/м.

4. $A_{23} = A - \frac{5}{2}\nu R\Delta T$. **5.** $F = \frac{df}{d+f} = 10$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

Математика

Вариант 1

1. $-\frac{2}{3}$. **2.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 2,5 м. **4.** $\left[1\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}\right)$.
5. $[2,4; 3,6]$. **6.** 2,1. **7.** 3. **8.** 4,4. **9.** 1,5. **10.** 48. **11.** 1; 3.

Вариант 2

1. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** $[0,5; 1]$. **3.** 4. **4.** $[1; 3]$. **5.** 31. **6.** $\frac{12P}{7}$.
7. 3000 руб. **8.** $(1,5; 2,5)$. **9.** 1. **10.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
11. 2.

Физика

Вариант 1

1. а) $a_1 = 2,5$ м/с^2, $a_2 = 0$; б) $L = 50$ м.

2. $a = g - \frac{kx}{m} = 6$ м/с^2. **3.** $H = \frac{k\Delta E_п}{mg(k-1)} = 10$ м.

4. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{М_1}{М_2}\frac{T_2}{T_1} = 1$. **5.** $Q = \frac{3}{2}mgh = 15$ Дж.

6. а) $E_1 = \frac{kq_1}{a^2}$; б) $q_2 = -q_1\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}q_1$.

7. $\frac{I_{кз}}{I_1} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E} - U_1} \approx 5,3$; $r = \frac{\mathcal{E} - U_1}{I_1} = 1$ Ом.

8. а) $I \approx 5$ мА; б) $t \approx 1$ с. **9.** $\alpha = \arcsin(n\sin\varphi) \approx 60°$.

10. $n = \frac{\nu\lambda}{c} = 200$.

Вариант 2

1. $v_0 = \frac{2s}{t_1} = 10$ м/с, где $t_1 = 1$ с.

2. $a_2 = \frac{3\mu g - a_1}{2} = 1,5$ м/с^2, вектор ускорения направлен против вектора скорости шайбы; пружина сжата.

3. $l = \frac{E_{max} - E_{min}}{mg} = 40$ см.

4. Температура выросла, так как плотность насыщенного пара увеличилась:

$$\frac{\rho_{н2}}{\rho_{н1}} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{\varphi(V_1 + V_2)} > \frac{\varphi_1 V_1}{\varphi(V_1 + V_2)} > 1.$$

5. $\frac{C_с}{C_г} = \frac{4c\rho dT}{ap} \approx 43$.

6. а) $q_1 = q_2 = q_3 = CU = 100$ мкКл; б) $q = CU = 100$ мкКл.

7. $R = \frac{U}{3I} = 10$ Ом. **8.** $Q = \frac{I_0^2 Rt}{2} = 3,6\cdot 10^6$ Дж.

9. $d = \frac{2h(n_1 - n_2)}{n_1(n_2 - 1)} = 1$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА

Математика

Вариант 1

1. 15 с, 18 с. **2.** $-\frac{7\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$. **3.** 9. **4.** $(0; 4) \cup [8; 12]$. **5.** 90°.

6. Нет решений при $a < -2$; 2 при $a = -2$; $-a + \sqrt{2(a+2)}$ и $-a$ при $-2 < a < 0$; $2 - a$ и $-a - \sqrt{2a}$ при $0 \le a < 2$; $-a \pm \sqrt{2a}$ при $a \ge 2$. *Указание.* Решите уравнение на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $[0; 2)$ и $[2; +\infty)$.

7. $\frac{11}{10}$. *Указание.* Пусть π – секущая плоскость, $MNPR$ – сечение пирамиды $TABC$ этой плоскостью (обозначения ясны из рисунка 2), V – объем пирамиды $TABC$. Из условия следует, что $MR \parallel AD$, $FA = \frac{1}{3}AC$. Докажите, что $TP = \frac{1}{4}PC$. Объем пирамиды $PCRF$ равен $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}V = \frac{32}{45}V$, объем пирамиды $NAMF$ равен $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}V = \frac{1}{18}V$, объем $TRBM$ равен $\frac{2}{9}V$, так что объем *четырехугольной* пирамиды $TPRMN$ равен $V - \left(\frac{32}{45}V - \frac{1}{18}V\right) - \frac{2}{9}V = \frac{11}{90}V$. Высота пирамиды $TPRMN$ нам известна, так что осталось найти V.

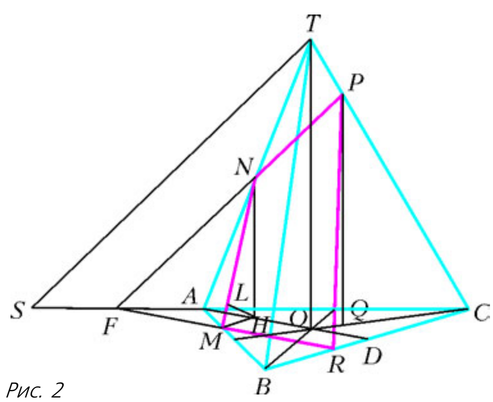


Рис. 2

Для этого заметим, что все точки прямой AD удалены от плоскости π на то же расстояние, что и точка T. Пусть NH – перпендикуляр из точки N на плоскость π, HL – перпендикуляр из H на MN. Из прямоугольного треугольника MNH находим, что $NH = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, тогда $TO = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}$. Итак, $\frac{1}{3}S_{MNPR}\cdot\frac{1}{4} = \frac{11}{90}\cdot\frac{3}{4}$, откуда $S_{MNPR} = \frac{11}{10}$.

Вариант 2

1. 30 ч, 6 ч. **2.** $\pi(2n+1)$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. 17,5. **4.** $[0; 1) \cup (1; 25)$. **5.** 10.

6. $-p \pm \sqrt{4p+12}$ при $p \in (-3; -2)$; 3 и -1 при $p = 1$; $2\sqrt{5} - 2$

и -1 при $p = 2$; $-p \pm \sqrt{4p-4}$ при $p \in [6; +\infty)$.

7. $\frac{21}{5}$, $\frac{24}{5}$.

Физика

Вариант 1

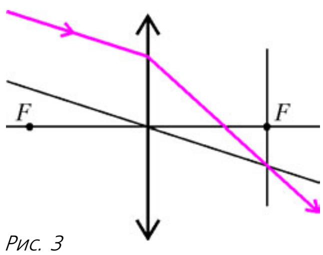


Рис. 3

1. Кольцо будет отклоняться от магнита.

2. См. рис. 3.

3. $v_O = \frac{2\pi A v}{\lambda} = 0{,}84$ м/с.

4. Цифрой 3.

5. Так как вдоль горизонтальной оси X внешние силы не действуют, то, согласно закону сохранения импульса, $m_1 v_{1x} = m_2 v_2$. Скорость верхней призмы (*1*) относительно нижней (*2*) находится по формуле

$$\vec{v}_{1о2н} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \text{ или } v_{1о2н}\cos\alpha = v_{1x} + v_2 .$$

Отсюда получим

$$v_2 = \frac{v_{1отн}\cos\alpha}{1 + m_2/m_1} = \frac{\sqrt{3}}{10} v_{1отн} .$$

6. $W = \frac{C}{2}\left(\mathscr{E}\left(\frac{5R+12r}{3R+6r}\right)\right)^2$.

7. Из закона сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mg\sin\alpha}{L}\frac{x^2}{2},$$

где x – длина троса в наклонной части трубы, m – масса троса, v_0 – начальная скорость троса, а

$$\left(\frac{m}{L}x\right)\frac{x}{2}g\sin\alpha = \frac{mg\sin\alpha}{L}\frac{x^2}{2}$$

– потенциальная энергия отрезка троса длиной x. Дифференцируя уравнение для энергии по времени и приравнивая полученное выражение нулю, получим уравнение движения троса

$$x'' + \frac{g\sin\alpha}{L}x = 0 .$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$x(t) = A\sin\omega t, \text{ где } A = \frac{L}{2}, \ \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{L}} .$$

Искомое время найдем из уравнения

$$x(t) = \frac{L}{4}, \text{ или } \frac{L}{4} = \frac{L}{2}\sin\omega t,$$

откуда

$$t = \frac{T}{12} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{2L}{g}} .$$

Вариант 2

1. Индукционный ток направлен против часовой стрелки (если смотреть справа).

2. Период колебаний увеличится.

3. $a = \frac{4\pi^2 A v^2}{\lambda^2} = 350$ м/с^2.

4. $q = 4\pi\varepsilon_0 r\frac{hc/\lambda - A}{e} = 1{,}45\cdot 10^{-11}$ Кл.

5. $F = mg\left(1 + \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}\right) = \frac{3}{2}mg$. **6.** $A = \frac{\nu M}{3}(v_1 - v_3)^2 = 2985$ Дж.

7. Рассмотрим два заряженных шарика как единую механическую систему. Кулоновское взаимодействие между шариками является внутренним, поэтому оно не влияет на движение центра масс системы. Единственная внешняя сила, действующая на систему, это сила тяжести, только она и будет определять движение центра масс системы. Начальное положение центра масс находится на высоте

$$h_{ц0} = \frac{3m\cdot h + 2m\cdot 3h}{3m + 2m} = \frac{9}{5}h,$$

а его начальная скорость v направлена горизонтально. В дальнейшем центр масс будет двигаться по параболе, характеризуемой уравнением

$$h_ц = h_{ц0} - \frac{g}{2}t^2 .$$

Нижний шарик упадет на землю в момент времени $t = \frac{L}{v}$. Положение центра масс в этот момент определяется соотношением

$$H_ц = h_{ц0} - \frac{g}{2}t^2 = \frac{9}{5}h - \frac{g}{2}\left(\frac{L}{v}\right)^2 .$$

С другой стороны,

$$H_ц = \frac{3m\cdot 0 + 2m\cdot H_2}{5m} = \frac{2}{5}H_2 .$$

Отсюда найдем высоту H_2 второго шарика:

$$H_2 = \frac{9}{2}h - \frac{5}{4}g\left(\frac{L}{v}\right)^2 .$$

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математика

Вариант 1

1. $\left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; 2\right)$. **2.** $\left(-5; 2 \pm \sqrt{3}\right) \cup \left(1; 2 \pm \sqrt{3}\right)$.

3. $\left(-\infty; 6 - \sqrt{35}\right] \cup \left[6 + \sqrt{35}; +\infty\right)$.

4. При $a \in \left[-\frac{1}{4}; 1\right]$: $x = \sqrt{\frac{1-a^2}{8a+17}}$; при других a: $\varnothing$.

5. а) $\frac{50}{3}$; б) $\frac{23\sqrt{85}}{3}$; в) $55\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\arccos(-1/6) + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. 12. **3.** $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

4. 1) При $a \in \{-3\} \cup \{-1\}$: $x \in \{2\}$;

при $a \in \left(-3; -2 - 1/\sqrt{2}\right] \cup \left[-2 + 1/\sqrt{2}; -1\right)$:

$$x \in \left[2 - \sqrt{1 - (a+2)^2}; 2 + \sqrt{1 - (a+2)^2}\right];$$

при $a \in \left(-2 - 1/\sqrt{2}; -2 + 1/\sqrt{2}\right)$:

$$x \in \left[2 - \sqrt{1 - (a+2)^2}; 2 - \sqrt{1/2 - (a+2)^2}\right] \cup$$

$$\cup \left[2 + \sqrt{1/2 - (a+2)^2}; 2 + \sqrt{1 - (a+2)^2}\right].$$

2) $2 \pm \sqrt{2}/2$.

5. а) $7\sqrt{22}$; б) $\frac{21}{13}\left(2 + \sqrt{13}\right)$.

Физика

Вариант 1

1. $g_1 = gkn^2$. **2.** $\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}$. **3.** $T = T_0\frac{S_1 + 3S_2}{2(S_1 + S_2)}$.

4. $A = \frac{\rho g a^4 (n-k)^2 \left(S - a^2\right)}{2S} = 0{,}1$ Дж. **5.** $E = E_0\frac{\left(a^3 + a_1^3\right)(a - a_1)}{a\left(a^3 - a_1^3\right)}$.

Вариант 2

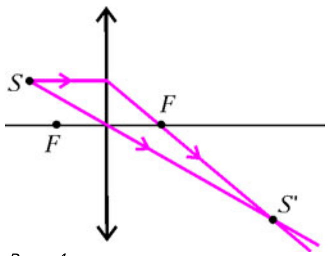


Рис. 4

1. См. рис.4.

2. $a_2 = \frac{g^2}{a_1}$.

3. $\varphi_A - \varphi_B = -\frac{\Delta\varphi}{22}$.

4. $\eta_1 = \frac{\eta}{2-\eta}$.

5. Положение тела устойчиво, так как

$$R_1^4\rho_1 > R_2^4\rho_2 + 2R_3^4\rho_3 .$$

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Вариант 1

1. Энергия, выделяющаяся в проводах, связана с энергий получаемой от источника, соотношением

$$\frac{U^2R_{1,2}}{\left(R+R_{1,2}\right)^2} = \beta_{1,2}\frac{U^2}{R+R_{1,2}}, \text{ откуда } R_{1,2} = R\frac{\beta_{1,2}}{1-\beta_{1,2}} .$$

Сопротивление однородного провода в случае постоянного тока обратно пропорционально его сечению, следовательно, получаем

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\beta_1\left(1-\beta_2\right)}{\beta_2\left(1-\beta_1\right)} = 11 .$$

2. Пусть x – растяжение верхней и нижней пружин, а y – растяжение «передней» средней пружины, тогда «задняя» средняя пружина сожмется на $y - x$. По второму закону Ньютона,

$$ma = ky + k\left(y-x\right) .$$

Сумма сил, приложенных к заднему невесомому стержню, равна нулю, следовательно,

$$2k_0x = k\left(y-x\right), \text{ или } y = x\frac{2k_0+k}{k} .$$

Из полученных уравнений находим

$$x = \frac{ma}{4k_0+k} .$$

3. Напряжения между пластинами на разных участках горизонтали равны, поэтому можно записать

$$E_1d_1 = E_2d_2 .$$

Заряды плоских участков верхней пластины противоположны по знаку: q и $-q$, как и у участков нижней: Q и $-Q$. Поля, создаваемые этими зарядами в зазорах, можно найти по принципу суперпозиции:

$$E_1 = E + k\frac{Q-q}{2S_1}, \quad E_2 = E - k\frac{Q-q}{2S_2},$$

$$\text{или } E_1S_1 + E_2S_2 = E\left(S_1+S_2\right) .$$

Отсюда получим

$$E_1 = Ed_2\frac{S_1+S_2}{S_1d_2+S_2d_1}, \quad E_2 = Ed_1\frac{S_1+S_2}{S_1d_2+S_2d_1} .$$

4. Когда пластинку только отпустили, разность давлений на ее верхнюю и нижнюю поверхности была равна $\Delta p_0 = \rho_0gd$, где ρ_0 – плотность воды, g – ускорение свободного падения, а d – толщина пластинки. Под воздействием силы трения со стороны воды скорость тонущей пластинки в конце концов станет постоянной, следовательно, из второго закона Ньютона получаем

$$\Delta p_{\text{макс}} = \rho gd ,$$

где ρ – плотность пластинки. Таким образом, отношение давлений равно

$$\frac{\Delta p_{\text{макс}}}{\Delta p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \approx 8.$$

5. Когда чашку ставят в горячую воду, давление нагревающегося воздуха (и паров) возрастает, заметно уменьшая прижимающую силу, а значит, и силу трения, что приводит к сползанию чашки. Слой же воды вне чашки не позволяет выйти воздуху из нее, пока избыточное давление не сравняется с давлением слоя.

Попробуйте провести этот эксперимент самостоятельно.

Вариант 2

1. Пусть v_0 – скорость капли при пересечении верхней границы окна. Тогда уравнение движения капли имеет вид

$$h = v_0t + \frac{gt^2}{2}, \text{ откуда } v_0 = \frac{h}{t} - \frac{gt}{2} .$$

Пусть v_1 – скорость капли при пересечении нижней границы окна. В таком случае можно записать

$$v_1 = v_0 + gt, \text{ или } v_1 = \frac{h}{t} + \frac{gt}{2} .$$

2. Пусть U_{AB} – напряжение между точками A и B, а q_1, q_2 и q_3 – заряды на конденсаторах с емкостями C_1, C_2 и C_3 соответственно. Запишем закон сохранения заряда в точке A:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 ,$$

где $q_1 = C_1\left(U_1 - U_{AB}\right)$, $q_2 = C_2\left(U_2 - U_{AB}\right)$, $q_3 = C_3\left(U_3 - U_{AB}\right)$. Отсюда получаем

$$U_{AB} = \frac{C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3}{C_1 + C_2 + C_3} .$$

3. Давление газа в сосуде определятся массой поршня и равно $p = (M+m)g/S$ до отрыва груза и $p' = Mg/S$ после отрыва груза, где S – площадь поршня. Пусть ν – число молей газа в сосуде, а h – высота на которую поднимется поршень после отрыва груза. Тогда из уравнения состояния идеального газа получаем

$$\nu RT_0 = \left(M+m\right)gH , \quad \nu RT = Mg\left(H+h\right) .$$

Количество теплоты

$$Q = mgH_0 ,$$

выделившееся при неупругом ударе груза, идет на работу по подъему поршня

$$A = Mgh$$

и приращение внутренней энергии гелия

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\left(Mg\left(H+h\right) - \left(M+m\right)gH\right) = \frac{3}{2}\left(Mgh - mgH\right) .$$

Из закона сохранения энергии (первое начало термодинамики) получаем

$$mgH_0 = Mgh + \frac{3}{2}\left(Mgh - mgH\right), \text{ откуда } h = \frac{\left(2H_0 + 3H\right)m}{5M} .$$

4. Отношение плотностей равно отношению молярных масс:

$$\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{D_2O}} = \frac{M_{H_2O}}{M_{D_2O}} = \frac{1\times2+18}{2\times2+18} = 1{,}1 .$$

Так как в стандартном стакане помещается 200 г обычной воды, то масса тяжелой воды будет на 20 г больше.

5. В первом случае силы тяжести, действующие на конусы равных масс, одинаковы, а силы сопротивления со стороны воздуха разные – больше для большего конуса. Поэтому больший конус медленнее разгоняется и отстает от меньшего. Во втором случае ускорения практически равны, что указывает на пропорциональность силы сопротивления площади основания конуса.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.А.И.ГЕРЦЕНА

Вариант 1

1. 4. **2.** $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$. **3.** 0.

4. $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** $\left(1-\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; 1+\sqrt{2}\right)$.

6. $[0; 4]$. **7.** 98550. **8.** 4. **9.** $30°$.

Вариант 2

1. 60 км. **2.** 2500. **3.** −2, 2; 2. **4.** $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup (1; 27]$.

5. $[-1; 2]$. **6.** 3. **7.** $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **8.** 5.

9. 13,5.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО (МАТИ)

Математика

Вариант 1

1. −3; 11. **2.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\pm\sqrt[8]{2}$. **3.** $\left[\frac{1}{2\sqrt{5}}; +\infty\right)$.

4. $\frac{2}{3}$. **5.** $\left[-2-\frac{3}{2}\sqrt{2}; \frac{25}{8}\right]$.

Вариант 2

1. Первая команда. **2.** $(-\infty; +\infty)$.

3. *Указание.* Если α и β – корни первого трехчлена, то они имеют разные знаки, а корни второго трехчлена это $-\alpha$ и $-\beta$.

4. $\frac{2}{9}$. **5.** 3. **6.** $(1; \pm 3)$; $(0; \pm 4)$; $(-3; \pm 1)$.

7. *Указание.* Пусть

$$A_n = \frac{1 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Докажите по индукции, что

$$A_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

8. $\left[-\sqrt{35}; 0\right]$. **9.** $\frac{32}{9}\left(3\sqrt{3}+4\pi\right)$.

Физика

Вариант 1

1. 4). **2.** 3). **3.** 2). **4.** 4). **5.** 4). **6.** 4). **7.** 2). **8.** 3). **9.** 3). **10.** 1).

Вариант 2

1. 5). **2.** 1). **3.** 4). **4.** 2). **5.** 1). **6.** 3). **7.** 1). **8.** 4). **9.** 4). **10.** 5).

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМ.И.М.ГУБКИНА

Математика

Вариант 1

1. 1. **2.** 10. **3.** 121. **4.** −2. **5.** 2. **6.** −1. **7.** 0,5. **8.** −30.

9. 46. *Указание.* Уравнение касательной к графику имеет вид

$$y = p^3 + 10{,}8p^2 - 25p + a + \left(3p^2 + 21{,}6p - 25\right)(x-p),$$

где p – абсцисса точки касания. Прямая должна проходить через начало координат, т.е. должно выполняться равенство $2p^3 + 10{,}8p^2 = a$. Осталось найти наибольшее целое значение a, при котором уравнение относительно p имеет три различных корня. Для этого исследуйте с помощью производной функцию $y = 2x^3 + 10{,}8x^2$, постройте эскиз ее графика и выясните, при каких a горизонтальная прямая $y = a$ пересекает график в трех точках (на рисунке 5 показан эскиз этого графика с различными масштабами по осям Ox и Oy).

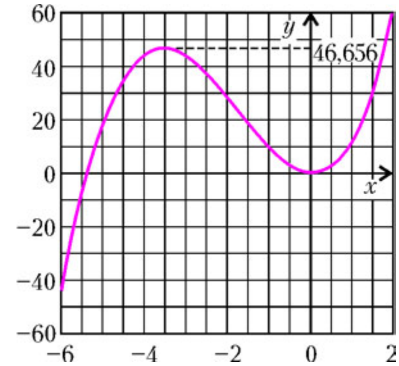


Рис. 5

10. 22.

11. 0,9232. Пусть ABC – данный треугольник (рис.6), $\angle ABC = \alpha$, O – центр вписанной окружности, $OM = OK = r$ – ее радиусы, проведенные в точки касания. Тогда $\angle OBM = \alpha/2$ и $BO = r/\sin(\alpha/2)$. Пусть T – центр второй окружности, $BT = x$ – ее радиус, $\angle MBT = \varphi$. Поскольку $OT = x - r$, то по теореме косинусов из ΔOBT

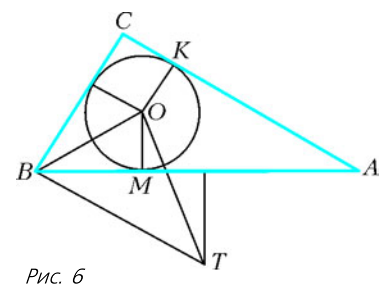


Рис. 6

$$(x-r)^2 = x^2 + \frac{r^2}{\sin^2(\alpha/2)} - \frac{2rx\cos(\alpha/2+\varphi)}{\sin(\alpha/2)},$$

или

$$r\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2) = 2x\left(\cos\varphi\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) - \sin\varphi - 1\right).$$

Если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, то $\cos\varphi = \frac{c}{2x}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{4x^2-c^2}}{2x}$, поэтому

$$r\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2) = c\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) - \sqrt{4x^2-c^2} - 2x.$$

Но $r\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) = BM$, $c - r\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) = AM = AK = b - r$. Отсюда

$$c\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) - r\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2) = \mathrm{ctg}(\alpha/2)\left(c - r\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)\right) = (b-r)\,\mathrm{ctg}(\alpha/2),$$

и поскольку $r = \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{c}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$, а $\mathrm{ctg}(\alpha/2) = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, то

$$(b-r)\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) = \frac{c}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha + 1) = \frac{P}{2},$$

где P – периметр данного треугольника. Мы получаем уравнение $\sqrt{4x^2-c^2} - 2x = \frac{P}{2}$, откуда $x = \frac{P}{8} + \frac{c^2}{2P}$.

12. 9. На рисунке 7 точка O – центр основания, M – середина бокового ребра SB. Центр шара, описанного около пирамиды $MABCD$, лежит на пересечении перпендикуляра к плоскости основания, проведенного через центр окружности, описанной около основания, в данном случае это есть продолжение высоты пирамиды SO, и плоскости, проходящей через середину какого-нибудь бокового ребра пирамиды $MABCD$ перпендикулярно к нему. В качестве такого ребра возьмем MB, и пусть N – середина MB. Тогда центр шара лежит в точке P пересечения продолжения высоты SO и прямой NP,

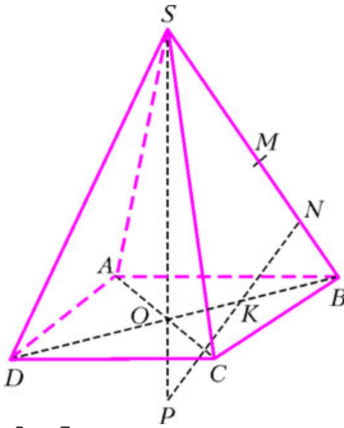


Рис. 7

проведенной в плоскости SOB перпендикулярно к MB. Радиус этого шара есть $x = PB$, при этом $x^2 = OP^2 + OB^2$. Пусть $SB = l$, $\angle SBO = \alpha$. Тогда $NB = l/4$, $OB = l\cos\alpha$, $BK = l/(4\cos\alpha)$ и $OK = l\dfrac{4\cos^2\alpha - 1}{4\cos\alpha}$. Поскольку $\angle KPO = \alpha$, то

$$OP = OK\operatorname{ctg}\alpha = l\frac{4\cos^2\alpha - 1}{4\sin\alpha}.$$

Теперь

$$x^2 = \frac{l^2}{16\sin^2\alpha}\left(8\cos^2\alpha + 1\right).$$

Но радиус шара, описанного около пирамиды $SABCD$, равен радиусу окружности, описанной около треугольника SBD, это есть $R = l/(2\sin\alpha)$. Поэтому

$x^2 = \dfrac{R^2}{4}\left(8\cos^2\alpha + 1\right) = \dfrac{R^2}{4}(5 + 4\cos 2\alpha)$. При этом $\angle BSD = \varphi = \pi - 2\alpha$. Отсюда

$$x^2 = \frac{R^2}{4}(5 - 4\cos 2\varphi) = R^2(1{,}25 - \cos\varphi),$$

и окончательно

$$x = R\sqrt{1{,}25 - \cos\varphi}.$$

Вариант 2

1. 1. **2.** 8. **3.** 0,9. **4.** −18. **5.** 19. **6.** 0,2. **7.** −1. **8.** 30.

9. −2. Составим уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{\sqrt{6}}{9}x^3$. Пусть p – абсцисса точки касания, тогда уравнение запишется так: $y = \dfrac{\sqrt{6}p^2x}{3} - \dfrac{2\sqrt{6}p^3}{9}$. Эта невертикальная прямая касается параболы $y = x^2 + a$, если относительно неизвестного x уравнение $x^2 + a = \dfrac{\sqrt{6}p^2x}{3} - \dfrac{2\sqrt{6}p^3}{9}$ имеет единственное решение. Дискриминант квадратного трехчлена есть $D = \dfrac{2p^4}{3} - 4\left(a + \dfrac{2\sqrt{6}p^3}{9}\right)$, и так как должно быть $D = 0$, то $a = \dfrac{p^4}{6} - \dfrac{2\sqrt{6}p^3}{9}$. Поскольку общая касательная должна быть единственной, надо выяснить, при каком значении параметра a это уравнение относительно неизвестной p имеет единственное решение. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = y = \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{2\sqrt{6}x^3}{9}$ и построим ее график. Поскольку $y = \dfrac{x^3}{6}\left(x - \dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$, то $y = 0$ при $x = 0$ и $x = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$, $y < 0$ при $x \in \left(0; \dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$ и $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$. Так как $f'(x) = \dfrac{2x^2}{3}\left(x - \sqrt{6}\right)$, то $f(x)$ убывает при $x \in \left(-\infty; \sqrt{6}\right)$ и возрастает при $x \in \left(\sqrt{6}; +\infty\right)$. При $x = \sqrt{6}$ функция достигает минимума, равного $f\left(\sqrt{6}\right) = -2$. Эскиз графика $f(x)$ построен по этим данным на рисунке 8. График не имеет точек пересечения с горизонтальной прямой $y = a$, если $a < -2$, и имеет две такие точки, если $a > -2$. Единственная точка пересечения будет только при $a = -2$. Ответ в задаче мы получили, но продолжим анализ. При $a = -2$ абсцисса точки касания есть $p_{\min} = \sqrt{6}$, при этом для кубической параболы $y(p_{\min}) = 4$, $y'(p_{\min}) = 2\sqrt{6}$. Для квадратичной параболы при $a = -2$ имеем $y(p_{\min}) = 4$, $y'(p_{\min}) = 2\sqrt{6}$. Совпадение в точке $x = \sqrt{6}$ функций и их производных означает, что общая касательная будет единственной в том и только в том случае, когда у двух графиков имеется общая точка касания.

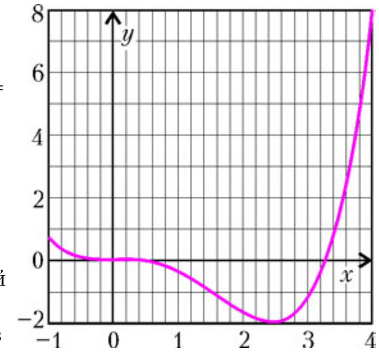


Рис. 8

10. 0,3. *Указание.* Прологарифмируйте обе части уравнения по основанию 10 и решите квадратное уравнение, коэффициенты которого содержат $\lg 3$.

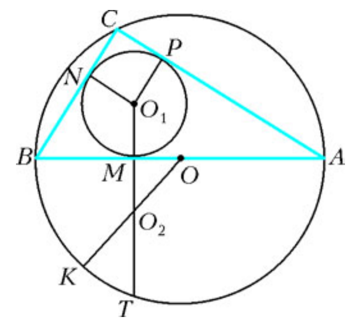


Рис. 9

11. 8. Пусть ABC – данный треугольник с гипотенузой $AB = c = 64$ и катетами $BC = a$, $AC = b$ (рис.9), O – центр описанной окружности радиуса $c/2$, лежащий посередине AB, O_1 – центр вписанной окружности, $O_1M = O_1N = O_1P = r$ – радиусы этой окружности, проведенные в точки касания. Центр третьей окружности лежит в точке O_2 отрезка MT так, что $O_2M = O_2K = \rho = 9$. Поскольку O_1NCP – квадрат, то $BN = BM = a - r$, и $MO = \dfrac{c}{2} - BM = \dfrac{c}{2} - (a - r)$. Но $r = \dfrac{1}{2}(a + b - c)$, поэтому $MO = \dfrac{b - a}{2}$. Запишем теорему Пифагора в треугольнике OMO_2:

$$\left(\frac{b - a}{2}\right)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{2} - \rho\right)^2,$$

тогда $ab = 2\rho c$. Из системы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ 2ab = 4\rho c \end{cases}$$

получаем $a + b = \sqrt{c^2 + 4\rho c}$, откуда $r = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 4\rho c} - c\right)$.

12. 288. На рисунке 10 изображено сечение конфигурации плоскостью, проходящей через вершину пирамиды S и середины K и P двух противоположных сторон основания пирамиды, так что SK и SP – апофемы. При этом O – центр основания, T – центр вписанной в пирамиду сферы, PT – биссектриса $\angle SPO$. Пусть $OM = MN = d = 2$, $\angle SKO = \beta$, $OT = TL = r$. Тогда $\angle LOM = \beta$, поэтому $OM = 2r\cos\beta$, $ON = 4r\cos\beta$, но $ON = OK\sin\beta$, поэтому

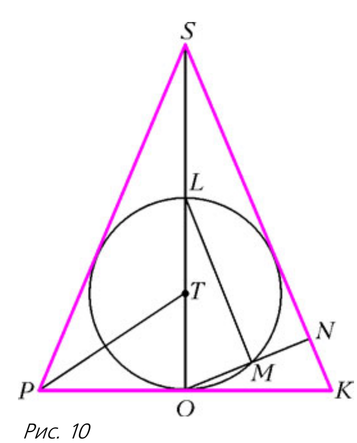


Рис. 10

$4r\cos\beta = OK\sin\beta$. Однако $r = OP\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = OK\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, и мы получаем уравнение $4\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}\beta$. Из него следует, что $\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, так что $\cos\beta = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = 2\sqrt{2}$.

Пусть сторона основания пирамиды $PK = a$. Тогда ее высота $SO = OK\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta$ и объем пирамиды равен $V = \frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\beta = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$, так что остается найти a. Поскольку

$$l = OM = 2r\cos\beta = 2OK\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cos\beta = \frac{a}{3\sqrt{2}},$$

то

$$a = 3\sqrt{2}\,l = 6\sqrt{2}.$$

Физика

Вариант 1

1. $5\ \text{м/с}^2$. **2.** $F = 6$ Н. **3.** $v = 440$ см/с. **4.** $m = 3$ кг. **5.** $\Delta U = 1200$ Дж. **6.** $A = 35$ мДж. **7.** $I = 3$ А. **8.** $k = 7$.

9. Запишем законы сохранения энергии и импульса для тележки с грузом:

$$m_1gh = m_1g\cdot 2R + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}, \qquad 0 = m_1v_1 - m_2v_2,$$

где v_1, v_2 – скорости груза и тележки в момент времени, когда груз находится в верхней точке петли. Чтобы найти силу N, действующую на груз в этот момент времени со стороны поверхности, надо записать второй закон Ньютона для груза в системе отсчета, связанной с тележкой:

$$N + m_1g = \frac{m_1(v_1+v_2)^2}{R},$$

так как именно в этой системе отсчета радиус кривизны траектории груза равен радиусу петли R. Отметим, что в рассматриваемый момент времени ускорение тележки равно нулю, т.е. связанная с ней система отсчета является инерциальной (сила инерции обращается в ноль). Выполнив преобразования, получим

$$N = m_1g\left(2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{h}{R}-2\right)-1\right) = 0{,}5m_1g = 1\ \text{Н}.$$

(На экзамене для экономии времени удобно сразу подставить в уравнение $m_2 = 2m_1$, $h = 2{,}5R$.)

Замечание. Если вы знакомы с важным свойством системы центра масс двух материальных точек, утверждающим, что кинетическая энергия системы выражается через относительную скорость точек по формуле

$$E_k = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{|\vec{v}_1-\vec{v}_2|^2}{2}$$

(это утверждение несложно проверить «в лоб»), то можно решать эту задачу в системе центра масс:

$$m_1gh = m_1g\cdot 2R + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{v_{\text{отн}}^2}{2}, \qquad N + m_1g = m_1\frac{v_{\text{отн}}^2}{R}.$$

10. $n = 3$. **11.** $k = 16$. **12.** $x = 40$ см.

Вариант 2

1. $v_{\text{ср}} = 29$ м/с. **2.** $x = 8$ мм. **3.** $N = 300$ Вт. **4.** $M = 36$ т. **5.** $\eta = 56\%$. **6.** $F = 12$ Н. **7.** $I = 25$ мкА. **8.** $a = 7\ \text{м/с}^2$.

9. Запишем закон сохранения импульса для неупругого удара груза и чашки весов: $mv = (m+M)u$, где $v = \sqrt{2gh}$ – скорость груза до удара, u – скорость чашки с грузом после удара. Для нахождения амплитуды колебаний запишем закон сохранения энергии для движения чашки с грузом. Это можно сделать двумя способами.

Во-первых, можно записать закон сохранения энергии «в лоб», отсчитывая энергию упругой деформации от недеформированного состояния пружины, а энергию тяготения – от конечного состояния, в котором скорость равна нулю (момент остановки):

$$\frac{(m+M)u^2}{2} + (m+M)gx + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{k(x+x_0)^2}{2},$$

где $x_0 = Mg/k$ – начальная деформация пружины. После преобразований приходим к квадратному уравнению

$$\frac{kx^2}{2} - mgx - \frac{m^2gh}{m+M} = 0,$$

два корня которого x_1 и x_2 соответствуют крайним точка колебаний. Расстояние между этими точками равно удвоенной амплитуде, откуда можно найти амплитуду:

$$A = \frac{|x_1-x_2|}{2} = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2km^2gh}{m+M}} = 10\ \text{см}.$$

Во-вторых, можно, как это принято при описании колебаний, отсчитывать полную потенциальную энергию от положения равновесия. Это положение описывается равенством $kx_{\text{р}} - (m+M)g = 0$, смещение от него равно $y = x - x_{\text{р}}$, а начальное смещение составляет

$$y_0 = x_0 - x_{\text{р}} = \frac{Mg}{k} - \frac{(m+M)g}{k} = -\frac{mg}{k}$$

(ось направлена вниз). Тогда закон сохранения энергии запишется проще:

$$\frac{ky_0^2}{2} + \frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Дальнейшее решение аналогично предыдущему.

10. $T = 400$ К. **11.** $\delta = 20\%$. **12.** $f = 18$ см.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Вариант 1

1. $\frac{2}{x-1}$. **2.** 4. **3.** 2. **4.** $\frac{\pi}{3}$. **5.** $y = \frac{2x+5}{x+2}$.

6. $(-\infty; -10]\cup[2; +\infty)$. **7.** $-2; -\frac{3}{2}; -1$. **8.** $[-2; 0)\cup[2; +\infty)$.

9. $\frac{3\pi}{4}$. **10.** $\pi + 2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. **11.** 0; 1. **12.** $-\log_2^2 3$. **13.** 5.

14. $\left(\frac{6}{5}; 2\right)\cup(2; 3]$. **15.** 35. **16.** $(-2; -2); (-2; 2)$.

17. $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k; \sqrt{2}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. **18.** $\frac{1}{3}$. **19.** 12. **20.** $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

Вариант 2

1. -3. **2.** 8. **3.** $a > b$. **4.** 2. **5.** $(3; 2)$. **6.** $3; \frac{7}{9}$. **7.** 36.

8. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **9.** $[-1; 1)\cup(1; +\infty)$. **10.** $(1; 1)$. **11.** 2.

12. -1; $\pm\sqrt[4]{3}$. **13.** 2; 4; 5; 9. **14.** $\frac{\pi}{6}$. **15.** $\left[5; \frac{60}{7}\right]$.

16. $\pm x + \sqrt{3}y - 2 = 0$. **17.** $[2; +\infty)$. **18.** 150°. **19.** 9. **20.** 6; 8.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Вариант 1

1. $\frac{179}{110}$. *Указание.* Пусть x – вычеркнутый член прогрессии, n – его номер, d – разность прогрессии. Сумма оставшихся членов равна

$$\left(x - d(n-1) + \frac{9}{2}d\right)\cdot 10 - x = 9x + d(55-10n),$$

поэтому

$$\begin{cases} 9x + d(55-10n) = 18, \\ x(n-1) - \dfrac{dn(n-1)}{2} = 7, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} d = \dfrac{18-9x}{5(11-2n)}, \\ x = \dfrac{18n^2 - 158n + 770}{11(n-1)(10-n)}. \end{cases}$$

Так как n – целое число из $[2; 9]$ то условие $x < 2$ равносильно

$$18n^2 - 158n + 770 < 22(n-1)(10-n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 - 40n + 99 < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2} < n < \frac{11}{2} \Leftrightarrow n = 5.$$

Тогда из второго уравнения системы находим $x = \dfrac{43}{22}$, а из первого – $d = \dfrac{9}{110}$.

2. $\left[1; \dfrac{5}{2}\right] \cup (4; 5]$. *Указание.* Если $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{5-x}$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2(u-v)}{u(2v-u)}\left(3u^2 - 2v + u\right) \le 0,$$

или

$$\frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{5-x}\right)\left(3x + \sqrt{x} - 2\sqrt{5-x}\right)}{\sqrt{x} - 2\sqrt{5-x}} \ge 0.$$

Функции $3x + \sqrt{x} - 2\sqrt{5-x}$, $\sqrt{x} - \sqrt{5-x}$ и $\sqrt{x} - 2\sqrt{5-x}$ возрастают, и их корнями являются 1, $\dfrac{5}{2}$ и 4 соответственно. Решая неравенство методом интервалов, получим ответ.

3. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + 2\pi k$, $\dfrac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{(2k+1)\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно такому:

$$\sqrt{13}\sin\left(2x - \operatorname{arctg} 2\sqrt{3}\right) = \sqrt{13}\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right).$$

4. $\dfrac{13\sqrt{39}}{12} r^2$.

5. 8. Заметим, что для подобных пирамид отношение радиусов вписанных сфер равно отношению радиусов описанных сфер. Докажем равенство $\dfrac{r_1}{r} + \dfrac{r_2}{r} + \dfrac{r_3}{r} + \dfrac{r_4}{r} = 2$, где r, r_1, r_2, r_3, r_4 – радиусы сфер, вписанных соответственно в исходную пирамиду и пирамиды, отсекаемые от нее плоскостями. Рассмотрим пирамиду, отсекаемую от исходной пирамиды $DABC$ плоскостью, параллельной грани ABC. Тогда $\dfrac{r_1}{r}$ равно отношению высот этих пирамид $\dfrac{H - 2r}{H} = 1 - \dfrac{2r}{H}$. Заметим, что объем $DABC$ равен $\dfrac{1}{3} HS_1$, он же равен $\dfrac{1}{3} rS$, где S_1 – площадь ΔABC, а S – площадь полной поверхности $DABC$. Поэтому $\dfrac{r_1}{r} = 1 - \dfrac{2S_1}{S}$. Складывая это равенство с аналогичными равенствами для других отсеченных пирамид, получим

$$\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} + \frac{r_4}{r} = 4 - 2\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S} = 2.$$

Для описанных сфер то же соотношение дает равенство

$$\frac{R_1}{R} + \frac{R_2}{R} + \frac{R_3}{R} + \frac{R_4}{R} = 2.$$

Вариант 2

1. $-\sqrt[3]{2}$. **2.** $\left(-2\sqrt{2}; -2\right) \cup (-2; 0) \cup (0; 2)$.

3. $\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2}$, $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $-\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\dfrac{\pi}{2}$. **5.** $[-4; -2) \cup \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$.

МОСКОВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА СТУДЕНТОВ ПО ФИЗИКЕ

1. $\tau = \dfrac{L(u\sin\varphi - v\cos 2\varphi)}{\left(u^2 - v^2\cos 2\varphi\right)\cos\varphi}$. **2.** $l = \dfrac{R\arcsin(1/4)}{2}$.

3. $l = 2R$. **4.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

5. $A = 0{,}315RT_x\left(2\exp(-0{,}315) - 1\right) = 0{,}145RT_x$.

6. $A = q\left(2\varphi_0 - \dfrac{3}{2}\dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0}\right)$.

7. При четном числе слоев индукция магнитного поля равна $B_0 = \mu_0\dfrac{I}{a}$, 0, B_0, 0 и так далее; при нечетном числе слоев индукция равна $\dfrac{B_0}{2}$, $-\dfrac{B_0}{2}$, $\dfrac{B_0}{2}$, $-\dfrac{B_0}{2}$ и так далее.

8. $I_4 = \dfrac{I_2}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_2}{2}\right)^2 - \dfrac{L_1 I_3 (I_1 - I_3)}{L_2}}$.

9. $I = I_1 + 4\left(2I_0 - \sqrt{I_0 I_1}\right)\left(1 + \cos\dfrac{2\pi d(n-1)}{\lambda}\right)$.

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, Н.А.Суворова, А.Е.Пацхверия,

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36
E-mail: marketing@chpk.ru

БолгарскиЙ ЧЕМПИОН

Осенью 2005 года в Сан-Луисе (Аргентина) состоялся чемпионат мира, в котором восемь претендентов на шахматную корону сражались в два круга. Уверенную победу одержал болгарский гроссмейстер Веселин Топалов – 10 очков из 14. Второе и третье места разделили Виши Ананд (Индия) и Петр Свидлер (Россия) – 8, 5 (по количеству побед вторым объявлен Ананд). Остальная пятерка не вышла за пределы 50 процентов: Александр Морозевич (Россия) – 7, Петер Леко (Венгрия) – 6,5, Майкл Адамс (Англия) и Рустам Касымжанов (Узбекистан) – 5,5, Юдит Полгар – 4,5.

За 120-летнюю историю розыгрыша первенства мира в турнире по круговой системе чемпион определялся всего один раз. В 1946 году после смерти Алехина шахматный мир впервые остался без короля, и спустя два года ФИДЕ провела матч-турнир, в котором убедительно победил Ботвинник, ставший первым советским чемпионом мира.

Напомним, как образовался октет гроссмейстеров, собравшихся в Сан-Луисе. Прежде всего, право играть имели оба участника матча на первенство мира «по классике» – Владимир Крамник и Петер Леко. Но поскольку Крамник играть отказался, в турнир включился только венгр. А вот участники финального матча на первенство мира ФИДЕ Касымжанов и Адамс согласились без колебаний. Еще четыре места предоставлялись сильнейшим по рейтингу на 1 января 2005 года. Но Гарри Каспаров, лидер в этой четверке, объявил о завершении своей шахматной карьеры, и осталось трио: Ананд, Топалов и Морозевич. Итак, два места освободились, и их заняли следующие по рейтингу – Свидлер и Полгар.

Контроль времени в Сан-Луисе был классический: 2 часа на 40 ходов, далее 1 час на 20 ходов и, наконец, 15 минут на все оставшиеся ходы с добавлением 30 секунд после каждого. При дележе первого места предусматривался тай-брейк, но он не понадобился.

Классический чемпион мира Крамник, проигнорировавший приглашение в Сан-Луис, впоследствии рассчитывает встретиться с чемпионом мира ФИДЕ Топаловым, если, конечно, найдется серьезный спонсор. Впрочем, «кредит доверия» Крамнику полностью исчерпан (все его последние выступления были неудачны), и шахматная общественность без колебаний признала нового чемпиона Топалова.

Зимой 2005 года на закрытии турнира в Линаресе Каспаров сказал Ананду: «Я ухожу, а тебя оставляю за старшего. Теперь ты – динозавр!» Но после Сан-Луиса старшим, похоже, придется назначать Топалова...

Болгарский гроссмейстер навсегда останется в истории еще и потому, что именно с ним играл (и проиграл!) свою последнюю серьезную партию Каспаров (если, конечно, Гарри не надумает вернуться в шахматы). Но есть у Топалова и много других заслуг: он был чемпионом мира среди юношей до 14 лет и завоевал серебряную медаль в чемпионате до 16, а в 17 лет уже стал гроссмейстером. В 1994 году на шахматной олимпиаде в Москве Топалов возглавлял болгарскую сборную и был единственным, кто нанес поражение Каспарову. Эта сенсационная победа решила исход матча с Россией в пользу Болгарии.

Спустя два года Топалов выиграл несколько супертурниров подряд, причем в одном разделил первый приз с тогдашним чемпионом мира Каспаровым, а в другом – с будущим чемпионом мира Крамником. О Топалове заговорили как об одном из самых вероятных претендентов на корону. В 1999 году состоялся матч Каспаров – Топалов, правда, в необычные, «продвинутые» шахматы – в них во время игры гроссмейстерам разрешается пользоваться компьютером. В любом случае результат встречи говорит сам за себя – 3:3!

Топалов не раз участвовал в борьбе за мировое первенство, а к вершине до сих пор ближе всего подходил на чемпионате мира ФИДЕ в Ливии в 2004 году, проходившем по нокаут-системе. Он выигрывал матч за матчем, в классических партиях набрал 9,5 из 10, и единственный, кто его остановил, уже в полуфинале, был Касымжанов, одолевший болгарина в рапиде. Правда, теперь Веселин сполна отомстил Рустаму... Триумфальным было выступление Топалова в первой половине 2005 года: дележ 1-2-го мест с Каспаровым в Линаресе и победа на супертурнире в Софии.

В Сан-Луисе Топалов проявил свои лучшие качества: отличную подготовку, дебютную и спортивную, неиссякаемую жажду борьбы, колоссальную энергию, буквально передававшуюся фигурам, которыми он управлял. К тому же, только он не испытал на турнире горечи поражения. Одним словом, Веселин вполне заслуженно поднялся на престол.

Познакомьтесь с одной из лучших побед нового чемпиона мира. В третьем туре Топалов играл с Морозевичем, который уже в дебюте сделал мирное предложение, но не встретил поддержки.

Морозевич – Топалов

Сан-Луис, 2005

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. ♗b5+ ♗d7 4. ♗:d7+ ♕:d7 5. 0-0 ♘f6 6. e5 de 7. ♘:e5 ♕c8 8. ♕f3 e6 9. d3 ♗e7 10. ♘c3 0-0 11. ♗f4 ♘fd7! Таким способом черные изгоняют из центра белого коня, а своего второго коня развивают на c6. **12. c4 ♘c6 13. ♖ae1 ♘d4 14. ♕d1 ♕c6 15. a4 b6 16. ♖e3 f6 17. ♖h3 ♖f7!** Перевод коня на f8 ликвидирует все попытки белых атаковать, и ладья h3 оказывается не у дел. **18. ♗e3 ♖d8 19. ♖e1 ♘f8 20. b3 a6 21. ♘e2 b5 22. ab ab 23. ♘d2 ♕c7.**

24. c4!? ♘c6! Перед разменом на d4 белые решили избавиться от отсталой пешки c2, но тут черный конь неожиданно отступил... **25. cb ♘b4 26. ♕b1.** Пешечная цепь разбита, но белые могли вызвать упрощения посредством 26. d4.

26...♘:d3 27. ♖d1 ♘b4! 28. ♘c4 ♘d5 29. ♗d2 ♕b8 30. ♗a5 ♖d7 31. b6 ♗d8. Топалов отыгрывает пешку, затем забирает еще одну, а получить приемлемую контригру противнику не удается. **32. ♖hd3 ♘:b6 33. ♗:b6 ♖:d3 34. ♕:d3 ♗:b6 35. ♕e3 ♗c7 36. g3 ♕b5 37. h4 ♕c6 38. f4 ♖d7 39. ♖e1 ♗d8 40. ♘c3 ♗e7 41. ♘e4 ♖d4 42. ♘f2 ♕d5 43. ♘b6 ♕b7 44. ♘c4 f5! 45. ♔f1 ♗f6 46. ♔e2 ♖d7 47. ♕f3 ♕b4 48. ♖d1 ♗d4 49. g4!?** Отчаяние... **49...h6 50. h5 ♕b8 51. ♖d2 ♖f7!**, и черные легко реализовали перевес.

Е.Гик

Индекс 70465
– по каталогу «Роспечать»

Физики и математики на монетах мира

Великому китайскому астроному и математику ЧЖЕН ШЕНЮ (78-139) приписываются многие изобретения Древнего Китая (в том числе и первого летательного аппарата). Однако его несомненным шедевром явилось создание в 132 году первого сейсмографа, представленного на нескольких монетах Китая.

(Подробнее о Чжен Шене и его сейсмографе - внутри журнала.)